

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES À FINALITÉ SPÉCIALISÉE EN DATA SCIENCE

Modélisation d'échanges d'opinions dans un ensemble de robots avec individus têtus

Rauw, Arthur

Award date:
2021

Awarding institution:
Université de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



**UNIVERSITÉ
DE NAMUR**

UNIVERSITE DE NAMUR

Faculté des Sciences

**Modélisation d'échanges d'opinions
dans un ensemble de robots avec individus têtus.**

Mémoire présenté pour l'obtention du grade académique de master en
«Master 120 en sciences mathématiques, à finalité spécialisée en data science »

Arthur Rauw

Juin 2021

Remerciements

Je remercie particulièrement Monsieur Alexandre Mauroy et Monsieur Elio Tuci, respectivement mon promoteur et co-promoteur de mémoire. Monsieur Tuci a toujours été très clair dans ce qu'il attendait personnellement de ce mémoire et Monsieur Mauroy a été d'une disponibilité et d'une implication qui me furent d'une aide et d'un soutien précieux.

Abstract

This master thesis is part of the study of opinion dynamics. It aims to answer the limitations of the article *Opinion dissemination in a swarm of simulated robots with stubborn agents : a comparative study* [11]. More precisely, its goal is to build a mathematical model of the *Probabilistic model* presented in this article. For the latter, simulations of the behaviour of 100 robots moving and exchanging opinions in a limited space have been carried out. This article focuses on the influence of the number of stubborn robots (never changing their opinion) of each opinion on the appearance or not of a consensus. First, we reproduced simplified simulations of the behaviour of these robots. Then we built different mathematical models. These models differ from each other in the abstractions from reality on which they are based, but also in the approach used to define a system state. In particular, we explored a macroscopic approach, a microscopic approach and, within these, a modelling via three different networks. Finally, we performed a qualitative analysis of the different results produced by these models by comparing them to each other and to simulations of the original system. The main conclusions of this master thesis are the following. The dependency between the opinion and the probability of changing the opinion of a robot in the *Probabilistic model* can not be ignored. In the same model, the total number of stubborn robots compared to the total number of robots has a determining influence on the opinion dynamics of the group of robots, as it is also the case in the *Majority model*. This proportion will be the origin for the appearance or not of a consensus. Finally, it seems impossible, in the Probabilistic model, for there to be a parameterisation for which there is both a stable equilibrium which is not a consensus and an unstable equilibrium.

Résumé

Ce mémoire s'inscrit dans le domaine de l'étude des dynamiques d'opinions. Il a pour objectif de répondre aux limitations de l'article *Opinion dissemination in a swarm of simulated robots with stubborn agents : a comparative study* [11]. Plus précisément, son objectif est de construire un modèle mathématique du *Probabilistic model* présenté dans cet article. Pour ce dernier, des simulations du comportement de 100 robots se déplaçant et échangeant des opinions dans un espace limité ont été réalisées. Cet article centre son analyse sur l'influence du nombre de robots têtus (ne changeant jamais d'opinion) de chaque opinion sur l'apparition ou non d'un consensus. Dans un premier temps, nous avons reproduit des simulations simplifiées du comportement de ces robots. Ensuite, nous avons construit différents modèles mathématiques. Ces modèles diffèrent les uns des autres par les abstractions par rapport à la réalité sur lesquelles ils sont basés mais aussi par l'approche utilisée pour définir un état du système. Nous avons notamment exploré une approche macroscopique, une approche microscopique et, au sein de celles-ci, une modélisation via trois types de graphes différents. Enfin, nous avons réalisé une analyse qualitative des différents résultats produits par ces modèles en les comparant les uns aux autres et aux simulations du système original. Les plus grandes conclusions de ce mémoire sont les suivantes. La dépendance entre l'opinion et la probabilité de changer d'opinion d'un robot dans le *Probabilistic model* ne peut pas être ignorée. Dans ce même modèle, le nombre total de robots têtus par rapport au nombre total de robots a une influence déterminante sur la dynamique d'opinion du groupe de robots, comme c'est le cas également dans le *Majority model*. Cette proportion sera la cause de l'apparition ou non d'un consensus. Pour terminer, il semble impossible, dans le *Probabilistic model*, qu'il existe une paramétrisation pour laquelle il y ait à la fois un équilibre stable qui ne soit pas un consensus et un équilibre instable.

Table des matières

1	Introduction	5
2	Présentation du problème	7
2.1	Description de l'étude de référence	7
2.2	Reproduction des simulations	9
2.2.1	Implémentation	9
2.2.2	Simulations	11
3	Modélisation via la master equation	17
3.1	Description des différentes approches existantes	17
3.2	Définition	18
3.3	Application	18
3.3.1	Définition de l'état du système	18
3.3.2	Adaptation de l'approche microscopique au <i>Probabilistic model</i>	20
3.3.3	Description des types de configuration des liens entre les robots	21
4	Modélisation du <i>Voter model</i>	23
4.1	Modélisation via l'approche macroscopique	23
4.2	Modélisation via l'approche microscopique	25
4.2.1	Modélisation via le graphe All-to-All	25
4.2.2	Modélisation via le graphe statique	27
4.2.3	Modélisation via le graphe dynamique	29
5	Modélisation du <i>Majority model</i>	33
5.1	Modélisation via l'approche macroscopique	33
5.2	Modélisation via l'approche microscopique	35
5.2.1	Modélisation via le graphe All-to-All	36
5.2.2	Modélisation via le graphe statique	37
6	Modélisation du <i>Probabilistic model</i>	39
6.1	Modélisation postulant l'indépendance : opinion/probabilité de changer d'opinion	39
6.1.1	Modélisation via le graphe All-to-All	40
6.2	Modélisation postulant la dépendance : opinion/probabilité de changer d'opinion	42
6.2.1	Modélisation via le graphe All-to-All	43
6.2.2	Analyse des bifurcations du modèle All-to-All	44
6.2.3	Modélisation via le graphe statique	48
6.2.4	Modélisation via le graphe dynamique	49
7	Conclusion	52

Chapitre 1

Introduction

Commençons par établir d'où nous allons démarrer et la direction que nous allons prendre pour ce mémoire. Nous vivons dans un monde rempli de réseaux dynamiques dans lesquels s'échangent des informations en permanence. Les fourmis s'échangent des informations pour trouver les meilleures sources de nourriture tout en effectuant des déplacements dans de nombreuses directions. Les abeilles s'échangent des informations pour trouver le meilleur endroit où construire un nid. Mais aussi et surtout, ce qui nous intéresse le plus, les humains échangent toutes sortes d'informations en utilisant de nombreux outils. Ils discutent oralement, ils discutent par écrit, ils partagent du contenu sur leurs réseaux sociaux d'internet. Mais quand les informations partagées sont contradictoires, ces échanges deviennent une dynamique d'opinion. Cela conduit les humains à s'influencer les uns les autres et à construire inconsciemment des réseaux de dynamiques d'opinion. Mais tout le monde ne communique pas avec tout le monde et tout le monde n'a pas la même prédisposition à changer d'opinion facilement en fonction du sujet. Cela rend les dynamiques d'opinion très complexes et suscite l'intérêt des chercheurs. Par exemple, A. Reina et al. ont réalisé l'article [14] pour lequel ils ont modélisé le comportement d'un essaim d'abeille qui doit choisir entre plusieurs lieux pour établir leur prochain nid. M. Coppola et al., quant à eux, ont abordé la dynamique d'opinion avec une autre approche dans [1] en étudiant la manière dont les pages web sont reliées les unes aux autres par des hyperliens. Mais l'approche qui nous intéresse pour ce mémoire est celle de G. Maitre et al. dans leur article *Opinion dissemination in a swarm of simulated robots with stubborn agents : a comparative study* [11]. Cet article s'inscrit dans le cadre de la recherche en vie artificielle en robotique, un concept exploité entre autre dans le livre de S. Nolfi [13].

Le travail que G. Maitre et al. ont réalisé est une étude de trois modèles d'échange d'opinion dans un groupe de robots circulant dans un espace limité. Chaque robot possède une des deux opinions existantes. Ce système se distingue par le fait qu'il contienne des paramètres correspondant au nombre de robots dits "têtu" parmi l'ensemble de robots. Ces derniers garderont la même opinion du début à la fin du processus. L'intérêt de la présence de ces robots têtus est la compréhension de ce qu'il faudrait comme paramétrisation du système pour que celui-ci atteigne un consensus à l'opinion souhaitée. Cette étude s'intéresse à trois modèles d'échange d'opinion. Il s'agit du *Voter model*, du *Majority model* et du *Probabilistic model*. Les deux premiers sont beaucoup étudiés, comme par exemple par G. De Masi et al. dans [2], mais le troisième est relativement nouveau et c'est pourquoi il suscite de l'intérêt. Ce modèle considère une probabilité de changer d'opinion propre à chaque robot qui évolue au cours du temps. G. Maitre et al. ont réalisé des simulations de ces trois différents modèles mais sont limités par la durée de ces simulations, ce qui limite leurs analyses. De plus, le nombre de paramètres dont ils voudraient mesurer l'impact sur les résultats de leurs simulations est conséquent.

C'est pourquoi nous tenterons, dans ce mémoire, de réaliser un modèle mathématique de ce système dynamique évoluant selon le *Probabilistic model*. L'objectif sera de pouvoir, à terme, calculer la probabilité que l'ensemble de robots soit dans un état donné à un moment donné en fonction des différents paramètres modifiables du système.

Dans un premier temps, dans le chapitre 2, nous allons nous familiariser avec la dynamique de ce groupe de robots en reproduisant des simulations simplifiées de celui-ci. Ces simulations nous permettront, par la suite, de comparer les résultats de notre modèle mathématique avec ceux d’une modélisation numérique la plus fidèle possible à la réalité. Ensuite, dans le chapitre 3, les outils mathématiques qui sont à la base de notre modèle seront décrits et appliqués selon une approche macroscopique et une approche microscopique. Deux stratégies de modélisation de la probabilité de changer d’opinion du *Probabilistic model* y seront également détaillées. Les chapitres 4, 5 et 6 posséderont la même structure. Chacun d’eux sera consacré à un modèle d’échange d’opinion. Nous y userons de différents graphes pour modéliser les relations entre robots. De plus, les résultats de nos différents modèles y seront analysés et discutés qualitativement en les comparant les uns aux autres. Enfin, une analyse du *Probabilistic model* mettra l’accent sur l’impact de l’évolution des différents paramètres du système sur les différents équilibres de celui-ci.

Chapitre 2

Présentation du problème

Dans ce chapitre, l'article [11], de G. Maitre et al. sera présenté. Cet article est celui qui est à l'origine des motivations de ce mémoire. Nous allons en expliquer le contenu, les résultats et préciser en quoi ce mémoire a pour objectif de répondre à des questions soulevées par cet article. De plus, nous allons reproduire des simulations simplifiées du système qui y est présenté dans le but de pouvoir comparer ces simulations avec les résultats des modèles que nous réaliserons par la suite. Nous détaillerons également l'implémentation de nos simulations pour que les différences avec les simulations de [11] soient suffisamment claires. Enfin, nous présenterons les résultats de nos simulations en les comparant avec ceux de l'article pour vérifier qu'elles en sont une approximation satisfaisante.

2.1 Description de l'étude de référence

Le travail que G. Maitre et al. ont réalisé est une étude de trois modèles d'échange d'opinion dans un groupe de robots circulant dans un espace limité. Cet espace est un carré de 10 mètres de côté et les robots sont au nombre de 100. Chaque robot possède une opinion représentée par la valeur 1 ou par la valeur 0 que nous appellerons respectivement l'opinion légitime et l'opinion contradictoire.

Indépendamment du modèle, tous les robots se déplacent selon les mêmes règles. Ces règles sont les suivantes. Les robots avancent tout droit pendant 5 secondes à une vitesse de 20 centimètres par seconde. Ensuite, ils font varier leur orientation d'un angle aléatoire θ dont la distribution suit une loi de probabilité de Cauchy de telle sorte que cette orientation suive un processus de marche aléatoire tout au long de la simulation.

$$f(\theta, \mu, \rho) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \mu)},$$

où μ , la moyenne de la distribution, vaut 0 et ρ , l'asymétrie de la distribution, vaut 0.5. Cette loi de Cauchy est paramétrisée de telle sorte qu'un robot ait peu de chance de faire brusquement demi-tour sans que cela soit pour autant impossible. La dernière règle que suivent les robots pour se déplacer concerne la décision à prendre quand ils rencontrent un obstacle, que ce soit un bord de la surface dans laquelle ils évoluent ou un autre robot. Dans ces cas-là, les robots font varier leur orientation d'un angle aléatoire dont la distribution suit une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle $[0, \pi]$ radians. L'angle qui mesure l'orientation d'un robot étant représenté dans le sens trigonométrique, les robots se tournent donc toujours vers la gauche quand ils rencontrent un obstacle.

Il existe deux sortes de robots : les robots qui peuvent modifier leur opinion et les robots "têtus" qui ne peuvent pas modifier leur opinion. Ces derniers garderont donc la même opinion du début à la fin de la simulation. Au début de chaque simulation du système, au temps t_0 , la moitié des robots non-têtus voit son opinion initialisée à 1 et l'autre moitié voit son opinion initialisée à 0. Dans chaque modèle, tous les robots

non-têtus font évoluer leur opinion en fonction de celle des autres robots selon une règle commune propre à ce modèle. Pour que ces échanges soient possibles, les robots manifestent leur opinion par un voyant dont la couleur varie en fonction de leur opinion. La couleur de ce voyant est détectable par les autres robots à proximité grâce à des capteurs adaptés. Après avoir observé d'autres robots, le robot observateur attend une durée aléatoire avant de recommencer. La distribution de cette durée suit une loi exponentielle paramétrisée de telle sorte que la moyenne entre deux observations de robots vaut 1,4 secondes. Dans le *Voter model*, les robots adoptent simplement, à chaque observation, l'opinion d'un robot choisi aléatoirement parmi ceux se situant à moins de 1,2 mètres d'eux. Dans le *Majority model*, ils choisissent aléatoirement, à chaque observation, deux des robots se situant à moins de 1,2 mètres d'eux et adoptent l'opinion de ceux-ci s'ils ont tous les deux la même opinion. Dans le *Probabilistic model*, à chaque observation, ils adoptent l'opinion d'un robot choisi aléatoirement parmi ceux se situant à moins de 1,2 mètres d'eux avec une probabilité qui est propre à chaque robot. Cette probabilité est initialisée à 1. Après chaque prise en compte de l'opinion d'un autre robot, ils font varier cette probabilité en la multipliant par un paramètre k strictement compris entre 0 et 1 si cet autre robot avait la même opinion qu'eux, diminuant ainsi leur probabilité de changer d'opinion par la suite. En revanche, si cet autre robot avait une opinion différente de la leur et indépendamment du fait qu'ils aient changé d'opinion ou pas, ils font varier cette probabilité en la divisant par un paramètre z strictement compris entre 0 et 1, augmentant ainsi leur probabilité de changer d'opinion par la suite. Notons $Pc(t)$, la probabilité que le robot non-têtu change d'opinion en observant un robot d'opinion opposée à la sienne en fonction du temps. Soit t_1 , un instant auquel le robot en observe un autre,

$$Pc(t_1 + dt) = \begin{cases} kPc(t_1) & , \text{ si le robot observé est d'opinion égale,} \\ \min\{1, \frac{Pc(t_1)}{z}\} & , \text{ si le robot observé est d'opinion opposée.} \end{cases}$$

Nous pouvons noter que le *Voter model* est en fait un cas particulier du *Probabilistic model* dans lequel k et z valent 1. Dans [11], la valeur des paramètres k et z est fixée respectivement à 0.8 et 0.4.

G. Maitre et al. ont effectué la simulation de ces modèles des centaines de fois en effectuant à chaque fois 50 000 étapes et en faisant varier $S1$, le nombre de robots têtus ayant l'opinion légitime, et $S0$, le nombre de robots têtus ayant l'opinion contradictoire. Ces simulations ont pour but d'étudier la manière dont deux opinions opposées se répandent dans une population en fonction de la manière dont les individus réagissent. Ils ont illustré leurs résultats avec les graphiques de la figure 2.1.

Le graphique (a) correspond aux simulations dans lesquelles $S1$ valait 5, le graphique (b) correspond aux simulations dans lesquelles $S1$ valait 10, le graphique (c) correspond aux simulations dans lesquelles $S1$ valait 20. En abscisse, nous lisons la valeur de $S0$. Ces graphiques représentent la répartition des résultats des différentes simulations avec, en ordonnée, le rapport entre le nombre de robots légitimes non-têtus et le nombre de robots non-têtus à la fin de la simulation. Nous voyons en noir les résultats du *Voter model*, en gris les résultats du *Probabilistic model* et en blanc les résultats du *Majority model*. Les boîtes noires semblent plus rapprochées de la valeur de 50 pourcents de robots non-têtus légitimes. Ce modèle ne semble donc pas favoriser l'apparition d'un consensus. Néanmoins, cette caractéristique semble s'appliquer aux trois modèles différents lorsque le nombre de robots têtus augmente, comme nous pouvons le voir sur le graphique (c). Les boîtes blanches, au contraire, semblent plus rapprochées de la valeur de 100 pourcents de robots non-têtus légitimes. Ce modèle semble donc, lui, favoriser l'apparition d'un consensus. Les boîtes grises, quant à elles, semblent être une sorte de compromis entre les deux autres modèles.

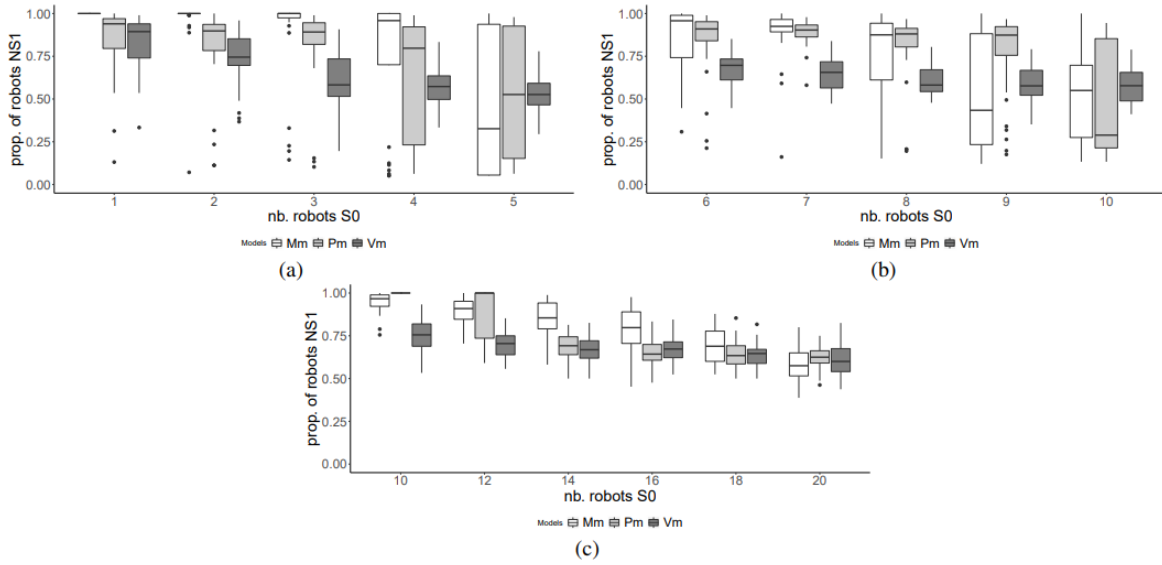


FIGURE 2.1 – Résultats de Maitre et al. Source : *Opinion dissemination in a swarm of simulated robots with stubborn agents : a comparative study* [11]

Après analyse de ces résultats, G. Maitre et al. ont conclu qu'il serait utile de posséder un modèle mathématique de ce système dynamique pour pouvoir connaître la répartition des résultats de ces simulations en fonction des différents paramètres modifiables du *Probabilistic model*. Ces paramètres sont k , z , $S0$, $S1$ mais également le nombre de robots total et les positions initiales des robots non-têtus. C'est ici que nous intervenons car c'est exactement ce que nous allons tenter de réaliser. Dans un premier temps, nous allons nous familiariser avec la dynamique de ce système en reproduisant des simulations de celui-ci. Ces simulations nous permettront par la suite de comparer les résultats de notre modèle mathématique avec ceux d'une modélisation numérique la plus fidèle possible à la réalité.

2.2 Reproduction des simulations

2.2.1 Implémentation

Nous réaliserons cette modélisation à l'aide d'un programme sur Matlab. Pour ce faire, nous devons accepter une abstraction. Ensuite, nous effectuerons une analyse des résultats de nos simulations et jugerons de l'efficacité de notre modélisation à reproduire les résultats de l'article. Pour terminer, nous listerons les abstractions supplémentaires qui seront nécessaires selon les différentes façons de modéliser mathématiquement notre système.

Notre abstraction, lors de ces simulations, sera le fait de considérer les robots comme des points sans épaisseur. La conséquence de ce choix est une différence dans la dynamique du mouvement des robots car, lorsque deux robots entrent en collision dans [11], ils ne font que se croiser dans notre modélisation et ne modifient donc pas leur orientation. Ils n'échangeront donc pas avec les mêmes robots que ceux avec lesquels ils auraient échangé s'ils avaient modifié leur orientation. Une autre conséquence de ce choix survient lorsqu'un robot s'approche du bord de l'espace dans lequel il évolue. En effet, n'ayant pas d'épaisseur, il pourra s'en approcher plus près. Cependant, cette conséquence-ci devrait, à priori, pouvoir être négligeable puisque les robots rencontrés devraient rester quasiment les mêmes. Par ailleurs, le déplacement des robots a pour effet de les caractériser, après un temps suffisamment long, par une densité de présence uniforme sur l'ensemble de la surface sur laquelle ils évoluent. Nous pouvons donc nous attendre à ce que leur déplacement influence

peu l'état asymptotique moyen du système.

Commençons par le choix des différents paramètres. Le nombre de robots est fixé à 100, le nombre d'étapes est fixé à 200 et les valeurs de k et z sont fixées respectivement à 0.8 et 0.4 pour correspondre à [11]. La distance à laquelle les robots se détectent les uns les autres, r , est fixée à 120 centimètres et h , la taille d'un déplacement lors d'un pas, est fixé à 100 centimètres pour correspondre aux 20 centimètres par seconde pendant 5 secondes mentionnés dans [11].

Passons à l'initialisation des variables. Les coordonnées ainsi que l'orientation des robots sont initialisées de manière aléatoire selon une loi uniforme. Dans le *Probabilistic model*, les probabilités de changer d'opinion des robots non-têtus sont initialisées à 1 et celles des robots têtus sont initialisées à 0 (ces dernières garderont cette valeur tout au long de la simulation). L'opinion de la moitié des robots non-têtus est initialisée à 1 tandis que l'opinion de l'autre moitié est initialisée à 0. Durant l'exécution du programme, lors d'une étape donnée, les robots ne feront pas tous évoluer en même temps leur opinion. Le programme effectuera cette évolution sur chaque robot dans l'ordre dans lequel ils sont codés. Or, sans perdre de généralité, si la première moitié des robots non-têtus est initialisée à 1, alors à la première étape ce seront les premiers à modifier leur opinion, ce qui influencera chaque simulation dans le même sens en favorisant l'opinion 0. En effet, dans ce cas de figure, quand les robots ayant l'opinion 0 commenceront à faire évoluer leur opinion, ils seront entourés d'une majorité de robots ayant l'opinion 0. C'est pourquoi l'initialisation des opinions des robots se déroule de manière aléatoire, tout en gardant une répartition égale des deux opinions au sein des robots non-têtus. Si le nombre de robots non-têtus est impaire, alors l'inégalité inévitable sera également tirée au hasard pour éviter une nouvelle fois que chaque simulation soit influencée dans le même sens. Le même procédé est utilisé pour répartir les opinions parmi les robots têtus en respectant la valeur des paramètres $S1$ et $S0$.

L'initialisation terminée, la simulation à proprement parler peut commencer. Elle se déroule en deux parties à chaque étape. D'abord les robots font évoluer leur opinion, ensuite ils se déplacent. Cette manière de procéder crée une différence avec les simulations de G. Maitre et Al. En effet, la durée entre deux observations de robots passe de 1,4 secondes de moyenne à 5 secondes fixes, la durée d'un déplacement. Ce choix permet de simplifier grandement les simulations et donc de diminuer la durée totale de celles-ci. En revanche, cela implique que les robots changent relativement moins vite d'opinion par rapport à la vitesse à laquelle ils se déplacent. Les *Voter model*, *Majority model* et *Probabilistic model* ont en commun le fait que les robots sélectionnent autour d'eux un ou plusieurs robots à chaque étape pour faire évoluer leur opinion. Mais cette sélection ne doit favoriser aucun robot, elle se fait donc, une fois de plus, de manière aléatoire. Dans le *Majority model*, le robot considéré ne fera évoluer son opinion que si les deux robots sélectionnés ont la même opinion. Dans le *Probabilistic model*, un nombre aléatoire entre 0 et 1 est généré suivant une loi uniforme. S'il est inférieur à la probabilité de changer d'opinion du robot considéré, alors celui-ci adopte l'opinion du robot sélectionné. Ce modèle contient une étape supplémentaire : après qu'un robot ait ou non changé d'opinion, cette probabilité évolue en étant multipliée par le paramètre k si le robot sélectionné avait la même opinion que lui et est divisée par le paramètre z si le robot sélectionné n'avait pas la même opinion que lui. Si, à un moment donné, une probabilité dépasse 1, elle est automatiquement ramenée à 1.

Ensuite vient la partie du déplacement, commune à chaque modèle. D'abord, les robots avancent de h centimètres. Ensuite ils se tournent d'un angle θ généré aléatoirement selon une loi de Cauchy. Cette étape a été appuyée par le travail présenté dans [7]. Ce déplacement se complique lorsqu'un robot rencontre un bord. Il doit s'arrêter provisoirement sur le bord, la fraction de déplacement qu'il lui reste à effectuer est calculée, son orientation est modifiée de manière aléatoire jusqu'à ce qu'il ne se dirige plus vers le bord et il termine son déplacement en s'éloignant de ce bord.

2.2.2 Simulations

Les figures 2.2 et 2.3 représentent les robots par des points dont la couleur correspond à leur opinion (vert pour 1, rouge pour 0). Dans la figure 2.2, nous pouvons observer des amas de points rouges et des amas de points verts. Cela s'explique par le fait que les robots interagissent avec les robots qui sont proches d'eux. Cependant, il y a des exceptions. Notamment des points verts entourés de points rouges. Il peut s'agir de robots légitimes non-têtus qui se sont déplacés au milieu de robots contradictoires sans pour autant changer leur opinion. Cela peut se produire dans le *Probabilistic model*. Il peut également s'agir de robots têtus qui ne changeront jamais d'opinion. Dans la figure 2.3, nous pouvons observer 2 points rouges au milieu de 98 points verts. L'un des deux points rouges est un robot têtu qui ne changera donc jamais d'opinion. L'autre, vu sa proximité avec le premier, est probablement un robot qui avait l'opinion 1 et qui s'est laissé convaincre en passant à côté de celui-ci, à moins qu'il s'agisse d'un autre robot têtu.

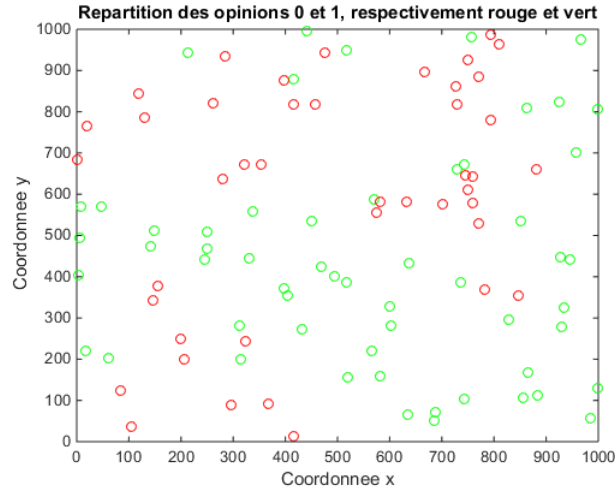


FIGURE 2.2 – Représentation de la répartition des opinions au sein du groupe de robots au début de l'exécution du programme.

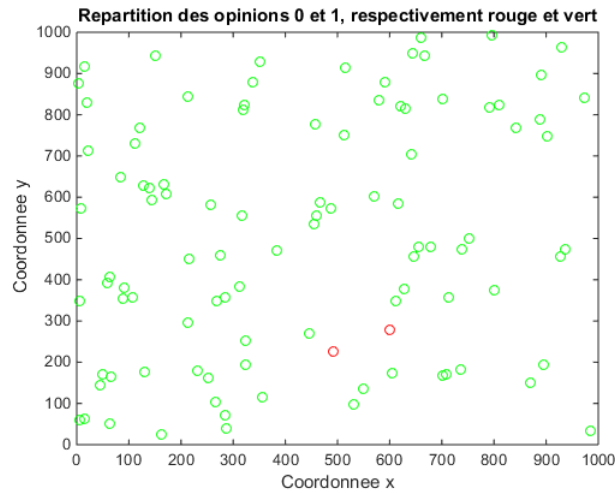


FIGURE 2.3 – Représentation de la répartition des opinions au sein du groupe de robots à la fin de l'exécution du programme.

Nous avons effectué notre programme plusieurs fois en faisant varier les paramètres $S1$ et $S0$ et nous avons représenté l'évolution de la répartition des opinions 1 et 0 parmi les robots non-têtu au cours du temps. Pour chaque modèle et chaque choix de paramètre, notre programme a été effectué 10 fois pour obtenir un début de tendance dans la répartition des résultats. Chaque courbe des graphiques qui vont suivre correspond donc à une simulation.

Commençons par le *Voter model*. Sur le graphique de gauche de la figure 2.4, nous observons que les courbes semblent se condenser dans une zone dans laquelle la proportion de robots non-têtu ayant l'opinion 1 est élevée. Sur le graphique de droite, les courbes se condensent proches du milieu de celui-ci. La valeur de $S0$ a donc de l'influence sur l'évolution de ce système. Ces observations semblent cohérentes, plus la valeur de $S1$ est grande par rapport à celle de $S0$, plus les robots rencontrent des robots ayant l'opinion 1 et donc, plus les robots adoptent l'opinion 1. Cependant, nous remarquons plusieurs courbes sur le graphique de gauche qui descendent après être montées au maximum. Un seul robot têtu ayant l'opinion 0 est donc suffisant pour continuer à convertir des robots dans ce modèle. Le consensus y est donc éphémère.

Dans la figure 2.5, nous observons un résultat visuel similaire à ceux de la figure 2.4, bien que sur le graphique de gauche de la figure 2.5, la tendance soit bien plus discernable que dans la figure 2.4. Les résultats sont beaucoup moins dispersés. De plus, dans la figure 2.5, les courbes semblent plus condensées que précédemment. Ces résultats rappellent les boîtes noires de la figure 2.1 qui étaient rarement positionnées tout en haut des graphiques et de plus en plus aplaties au fur et à mesure que le nombre de robots têtus augmente. Les observations réalisées sur les résultats des simulations du *Voter model* corroborent donc les résultats de [11].

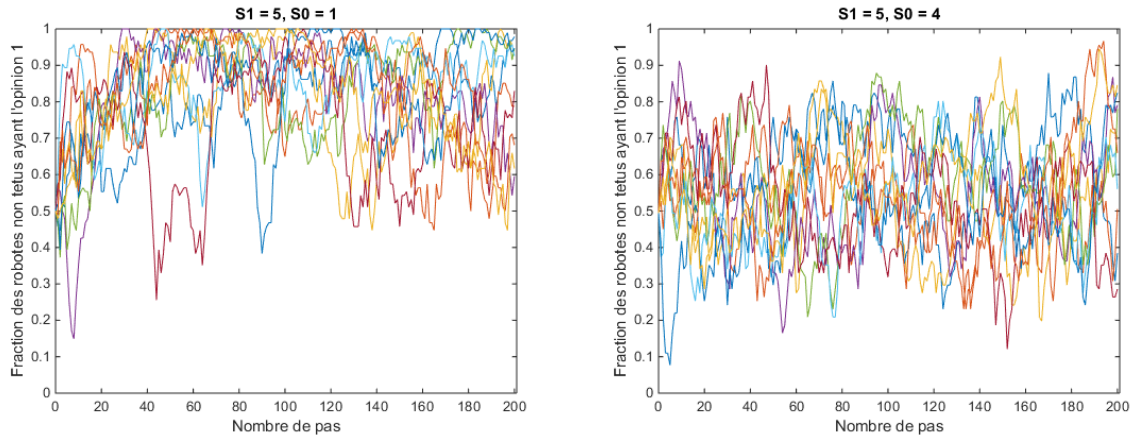


FIGURE 2.4 – Evolution de la fraction des robots non-têtu ayant l'opinion 1 au cours du temps en fonction de la valeur de $S0$, quand $S1$ vaut 5, dans le *Voter model*, pour 10 simulations différentes pour chaque paramétrisation.

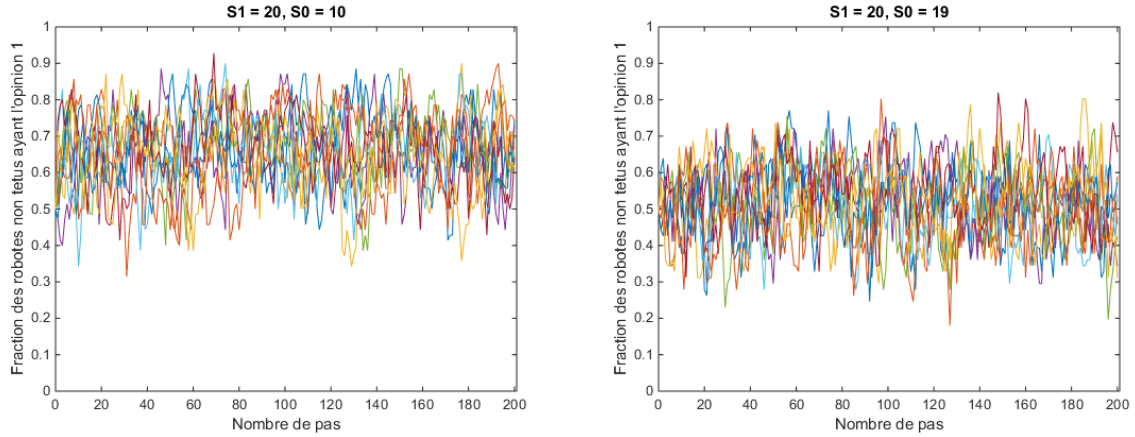


FIGURE 2.5 – Evolution de la fraction des robots non-têtu ayant l’opinion 1 au cours du temps en fonction de la valeur de S_0 , quand S_1 vaut 20, dans le *Voter model*, pour 10 simulations différentes pour chaque paramétrisation.

Passons au *Majority model*. Sur les graphiques de la figure 2.6, une différence est frappante par rapport au modèle précédent : les courbes ont une variation bien plus lente ! Cela s’explique par le fait que, dans ce modèle, il faut qu’un robot rencontre deux robots en même temps ayant la même opinion pour faire évoluer la sienne. Cette évolution est donc plus lente. Sur le graphique de gauche de cette figure, nous observons que les courbes montent globalement pour ensuite se stabiliser au maximum, 1. Il est normal qu’elles ne puissent plus descendre après avoir atteint ce maximum car, dans ce modèle, un seul robot n’est pas suffisant pour en convaincre un autre. Notons la présence d’une courbe descendant au minimum, 0, avant de remonter au maximum. Ce comportement est rendu possible par la présence de cinq robots tête ayant l’opinion 1. Sur le graphique de droite, les courbes peuvent redescendre après avoir atteint le maximum, car cette fois-ci, S_0 vaut 4. De manière générale, dans la figure 2.6, les courbes semblent se stabiliser au maximum ou au minimum. Ce modèle semble donc favoriser l’apparition d’un consensus.

Dans la figure 2.7, la dynamique du système semble avoir complètement évolué. Sur le graphique de gauche, toutes les courbes se condensent à 1, tandis que sur le graphique de droite, les courbes semblent osciller autour d’une certaine valeur et n’atteignent même plus les extremums. Le résultat de gauche s’explique par un déséquilibre entre S_1 et S_0 . Les robots tête d’opinion 1 sont tellement nombreux qu’ils provoquent un consensus quasi systématique à l’opinion 1. Le résultat de droite, en revanche, rejoint les résultats du *Voter model*. En effet, les consensus ont disparu, comme si le nombre de robots tête total grandissant sans trop favoriser une opinion plus que l’autre empêchait les robots non-têtu d’atteindre ces consensus. Cela peut s’expliquer par le fait que les 39 robots tête augmentent la fréquence à laquelle un robot peut en rencontrer deux autres ayant la même opinion, différente de la sienne. Néanmoins, en voyant le graphique de gauche, la différence entre S_1 et S_0 semble garder un réel impact dans ce modèle quand elle est suffisamment grande. Les observations réalisées sur les résultats des simulations du *Majority model* corroborent exactement les résultats de [11] comme nous pouvons le constater en revenant sur la figure 2.1. En effet, les boîtes de cette figure correspondant au *Majority model*, les boîtes blanches, sont aplaties et proches de 1 quand le nombre de robots tête est faible et que la différence entre S_1 et S_0 est grande. Elles sont étirées quand le nombre de robots tête est faible mais que cette différence est faible également, ce qui correspond à la présence de deux consensus possibles, deux équilibres en 1 et 0. Enfin, ces boîtes sont aplaties et éloignées de 1 quand le nombre de robots tête est grand pour chaque opinion, aucun consensus n’est donc atteint.

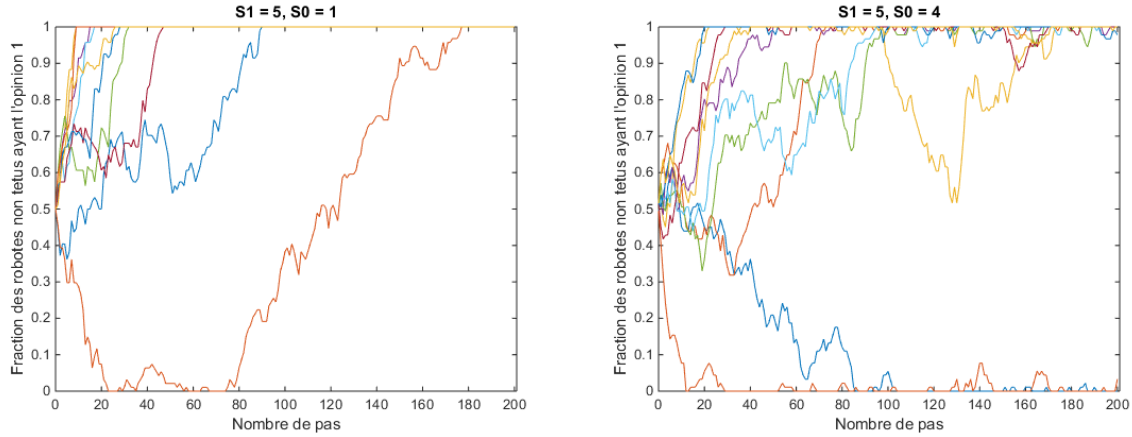


FIGURE 2.6 – Evolution de la fraction des robots non-têtus ayant l’opinion 1 au cours du temps en fonction de la valeur de S_0 , quand S_1 vaut 5, dans le *Majority model*, pour 10 simulations différentes pour chaque paramétrisation.

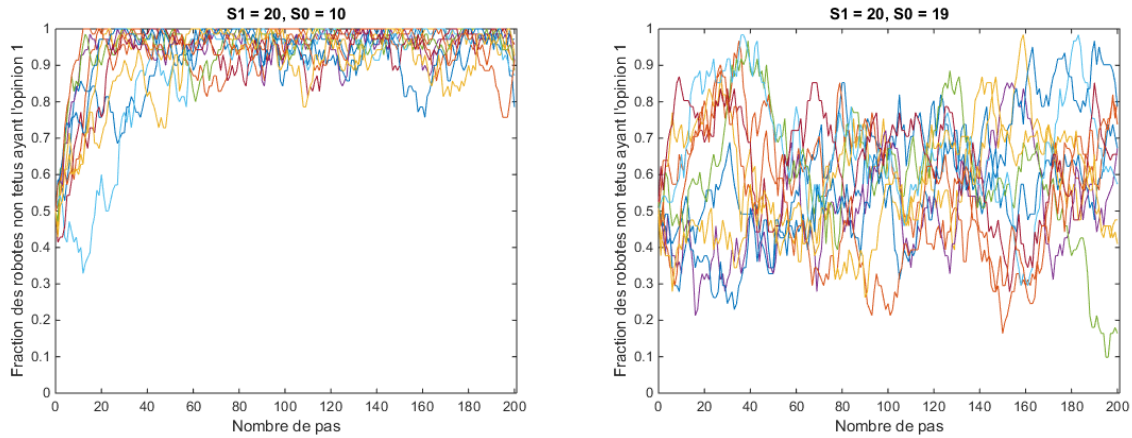


FIGURE 2.7 – Evolution de la fraction des robots non-têtus ayant l’opinion 1 au cours du temps en fonction de la valeur de S_0 , quand S_1 vaut 20, dans le *Majority model*, pour 10 simulations différentes pour chaque paramétrisation.

Terminons par le *Probabilistic model*. Sur les graphiques de la figure 2.8, une nouvelle différence survient par rapport au modèle précédent : les courbes tendent bien plus rapidement vers un consensus ! Cela s’explique par le fait que, dans ce modèle, une fois que la répartition des opinions dépasse un certain seuil d’inégalité, la probabilité de changer d’opinion des robots ayant l’opinion majoritaire diminue globalement alors que la probabilité de changer d’opinion des autres robots augmente globalement. En effet, les robots seront en moyenne davantage en contact avec des robots ayant l’opinion majoritaire. Sur le graphique de gauche de cette figure, nous observons que les courbes montent relativement rapidement jusqu’au maximum, 1. La valeur des paramètres S_1 et S_0 des simulations correspondantes semble avoir été très déterminante dans ce modèle. Sur le graphique de droite, certaines courbes se stabilisent au minimum, 0. L’écart entre les valeurs des paramètres S_1 et S_0 des simulations correspondantes n’est donc pas suffisamment déterminant pour que le consensus soit toujours le même d’une simulation à l’autre. Notons cependant que le consensus est systématiquement atteint relativement rapidement.

Sur le graphique de gauche de la figure 2.9, les courbes tendent toutes vers un consensus autour de l'opinion 1, bien que plus lentement que dans les simulations précédentes. Mais le graphique le plus surprenant de cette figure est celui de droite. En effet, alors que depuis le début de nos simulations nous constatons que, dans le *Probabilistic model*, un déséquilibre dans la répartition des opinions a tendance à s'accroître au cours du temps, les courbes se condensent autour d'une certaine valeur, sans que les robots ne tendent vers un consensus. Il semble donc qu'au delà d'un certain nombre de robots têtus, ce modèle ne soit plus capable de produire un consensus, tout comme c'était le cas pour le *Majority model*. Les observations réalisées sur les résultats des simulations du *Probabilistic model* corroborent les résultats de [11] comme nous pouvons le constater en revenant sur la figure 2.1. En effet, nous pouvions y observer les boîtes grises du *Probabilistic model* très étirées quand leur centre s'éloigne de 1 sur les graphiques (a) et (b), ce qui correspond à nos résultats. Les courbes sont soit toutes condensées autour du maximum, soit totalement divisées entre 0 et 1, sans valeur intermédiaire. De plus, sur le graphique (c), les boîtes grises éloignées de la valeur 1 sont soudainement aplaties, les résultats se condensent loin de 0 et 1, comme lors de nos dernières simulations.

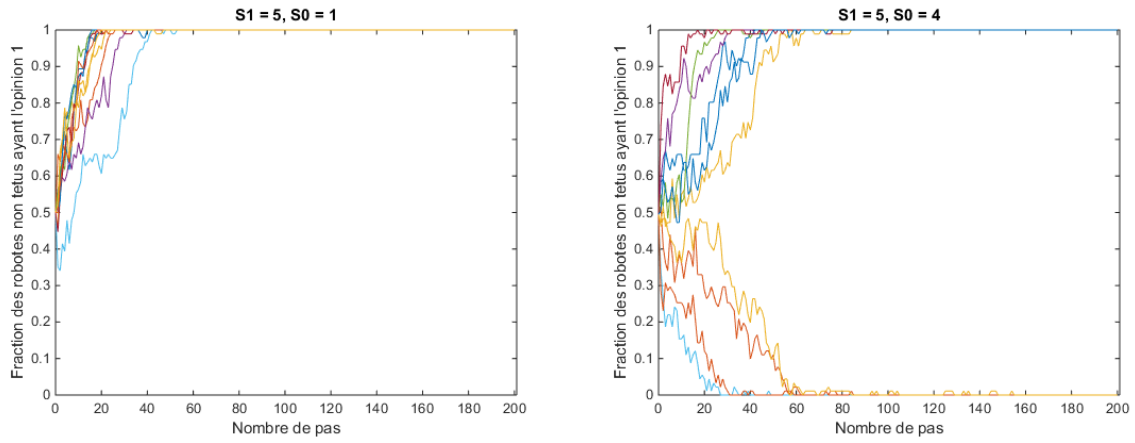


FIGURE 2.8 – Evolution de la fraction des robots non-têtus ayant l'opinion 1 au cours du temps en fonction de la valeur de S_0 , quand S_1 vaut 5, dans le *Probabilistic model*, pour 10 simulations différentes pour chaque paramétrisation.

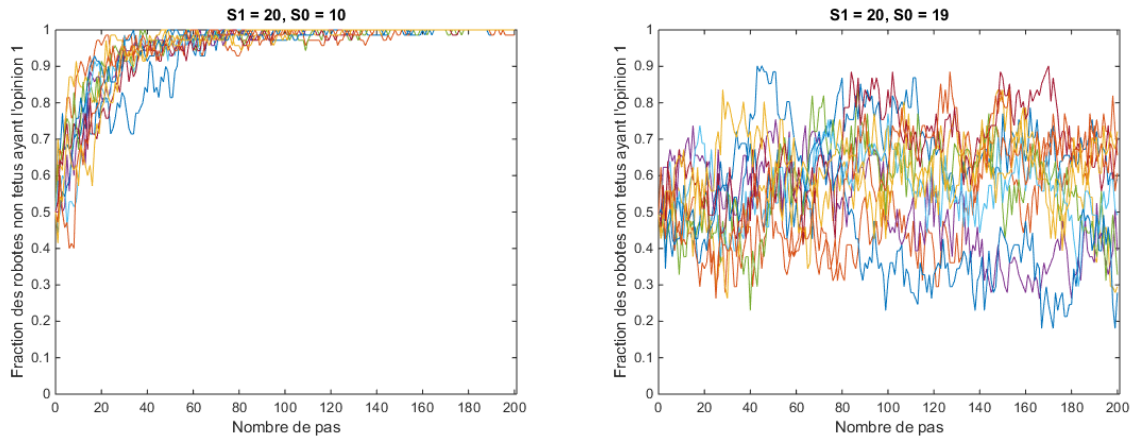


FIGURE 2.9 – Evolution de la fraction des robots non-têtus ayant l'opinion 1 au cours du temps en fonction de la valeur de S_0 , quand S_1 vaut 20, dans le *Probabilistic model*, pour 10 simulations différentes pour chaque paramétrisation.

Globalement, notre programme semble reproduire correctement le comportement de 100 robots échangeant des opinions dans un carré de 10 mètres de côté tels que décrits dans [11]. Les résultats de notre modélisation mathématique de ce système pourrons donc par la suite être comparés avec ceux de notre modélisation numérique pour pouvoir les analyser.

Dans la suite de ce mémoire, deux approches seront étudiées pour définir un état de ce système dynamique. Il s'agit de l'approche macroscopique, décrivant l'opinion globale du groupe de robots, et de l'approche microscopique, décrivant l'opinion d'un robot donné. Pour la seconde approche, trois types de configuration seront étudiés pour modéliser mathématiquement les liens entre les robots de ce système dynamique. Ils correspondent à trois abstractions différentes par rapport à nos simulations. Le premier type considère que les robots se mélangent de façon parfaitement homogène, ils peuvent donc tous potentiellement s'influencer à chaque étape. Si les robots sont des noeuds et la proximité entre eux, des arêtes, le graphe qu'ils constituent est donc un graphe All-to-All. Le second type considère que les robots ne se déplacent pas et influencent toujours les mêmes robots. Ce graphe sera appelé, dans ce cas, un graphe statique. Le troisième type considère que les robots se déplacent exactement comme dans nos simulations. Ce dernier type de configuration n'implique donc pas d'abstraction supplémentaire et peut être appelé un graphe dynamique.

Chapitre 3

Modélisation via la master equation

3.1 Description des différentes approches existantes

Le système qui nous occupe est un système pour lequel nous voudrions décrire l'évolution de certaines valeurs en fonction du temps, ou plus précisément la probabilité de différents états en fonction du temps. Cet objectif est habituel quand on travaille avec un système dynamique. Il existe donc plusieurs approches et plusieurs outils mathématiques qui ont déjà été utilisés dans divers contextes similaires. Par exemple, dans [6], un ensemble d'individus se déplaçant et échangeant des opinions est modélisé. Ces individus doivent choisir entre deux sites à rejoindre. La même problématique est rencontrée dans [2], qui a vocation à modéliser la dynamique d'opinions au sein d'une colonie de fourmis. Cet article est particulièrement intéressant car les *Voter model* et *Majority model* y sont étudiés avec, en plus, la présence de fourmis têtues. Mais ces exemples diffèrent de notre système car, dans, notre cas, le déplacement des robots est complètement indépendant de leur opinion. Les systèmes d'équations différentielles ordinaires qui y sont utilisés ont néanmoins des similitudes avec ceux que nous utiliserons.

Dans [1], une approche particulière est employée : l'algorithme PageRank, servant habituellement à classer les pages référencées par Google, est adapté pour étudier le comportement de robots et l'évolution de leurs opinions en représentant ces robots comme un graphe. Cet article contient aussi des modèles pour les systèmes dont le nombre d'opinions possibles est supérieur à 2. Nous retrouvons cette particularité dans [16]. En effet, les analyses de dynamiques d'opinion qui y sont proposées mettent l'accent en particulier sur les groupes d'individus de taille réduite (3 ou 4), sur plusieurs quantités d'opinions possibles, mais aussi sur les individus anti-conformistes, s'opposant à la majorité. Ces différents angles d'étude y sont abordés selon une approche plutôt macroscopique. Dans [14], un lien est mis en évidence. Il s'agit du lien entre l'approche microscopique, qui étudie l'évolution de l'opinion d'un robot donné, et l'approche macroscopique, qui étudie l'évolution de l'opinion globale du groupe. Ce lien est utilisé pour modéliser le comportement d'un essaim d'abeilles cherchant le meilleur emplacement pour leur nid. En travaillant au niveau macroscopique, une loi binomiale apparaît régulièrement. En effet, quand chaque robot a la même probabilité d'avoir une opinion donnée, c'est une loi binomiale qui détermine la probabilité qu'il y ait une certaine quantité de robots ayant une opinion donnée. C'est notamment le cas dans [4]. C'est pourquoi nous en userons également lors de notre approche macroscopique. D'autres types de modèles ont été également étudiés, comme, par exemple, le modèle considérant que chaque robot possède un paramètre qui détermine la confiance qu'il a en l'opinion d'un autre robot. Ce modèle est présenté dans [10].

Un outil mathématique central dans l'analyse de dynamiques d'opinions est la master equation. Cette équation est une équation différentielle basée sur les propriétés des chaînes de Markov, comme cela est théorisé dans [3], [8], [9] et [12]. Elle est applicable dans un grand nombre de domaines comme, notamment, l'étude de modèles épidémiologiques. Cela est le cas dans [15]. L'étude de réactions chimiques, dans [5], est également un exemple d'application de la master equation. Elle sera notre outil principal durant ce mémoire

et c'est pourquoi nous allons en définir les conditions d'utilisation et l'appliquer à la dynamique d'opinions de notre ensemble de robots.

3.2 Définition

Un processus stochastique X est une fonction mesurable $X : [0, \infty] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{N} . Ce processus est un processus de Markov si et seulement si son état futur dépend uniquement de son état présent, pas de son état passé. Autrement dit,

$$P(X(t + dt) = x | X(\tau), \tau \in [0, t]) = P(X(t + dt) = x | X(t)).$$

Un processus de Markov vérifie l'équation de Chapman-Kolmogorov décrite ci-dessous.

$$P(x_2, t_2 | x_0, t_0) = \sum_{x_1} P(x_2, t_2 | x_1, t_1) P(x_1, t_1 | x_0, t_0),$$

où $t_0 \leq t_1 \leq t_2$. Notons $W(x' | x, t)dt = P(x', t + dt | x, t)$. La master equation,

$$\frac{\delta P(x, t | x_0, t_0)}{\delta t} = - \sum_{y \neq x} W(y | x, t) P(x, t | x_0, t_0) + \sum_{y \neq x} W(x | y, t) P(y, t | x_0, t_0),$$

décrit l'évolution en fonction du temps de la probabilité que le système se trouve dans l'état x au temps t sachant qu'il se trouvait dans l'état x_0 au temps t_0 . Cette section est issue de [12].

3.3 Application

3.3.1 Définition de l'état du système

Dans la suite de ce mémoire, nous noterons N le nombre total de robots, $T \subset \{1, \dots, N\}$ l'ensemble des indices des robots têtus et $I \subset \{1, \dots, N\}$ l'ensemble des indices des robots non-têtus. Pour appliquer la master equation à la dynamique de notre ensemble de robots, il faut décider comment définir l'état du système. Deux approches différentes seront explorées. La première, la macroscopique, consiste à définir l'état du système comme étant $N_1(t)$, le nombre de robots non-têtus ayant l'opinion 1 en fonction du temps. La seconde, la microscopique, définit l'état du système comme étant, pour chaque robot i , la valeur de $Op_i(t)$, son opinion en fonction du temps. L'évolution de la valeur de ces variables est dépendante de la situation initiale et des mouvements des robots qui sont construits pour être aléatoires. En conséquence, ce qu'il faudra décrire est l'évolution en fonction du temps de la probabilité qu'un robot donné soit dans un état donné, indépendamment de ce que cet état représente.

Application à l'approche macroscopique

Commençons par l'approche macroscopique. Soit $N_1(t) : [0, \infty] \times \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction mesurable. Cette fonction est un processus stochastique discret. Nous utiliserons ici un processus discret car les états possibles du système sont discrets. En effet, le nombre de robots non-têtus ayant l'opinion 1 peut prendre comme valeur tous les naturels compris entre 0 et $N - S1 - S0$, où $S1$ est le nombre de robots têtus ayant l'opinion 1 et $S0$ est le nombre de robots têtus ayant l'opinion 0.

Ce processus, dans le cas du "Voter model" et du "Majority model", est assimilable à un processus de Markov si l'on fait abstraction de l'orientation des différents robots. Dans le cas du "Probabilistic model", la probabilité qu'un robot donné change d'opinion diffère d'un robot à l'autre. Cette approche ne pourra donc pas être utilisée pour modéliser le *Probabilistic model* car elle nécessite que les robots ne doivent pas être distingués les uns des autres.

Notons $N_0(t)$ le nombre de robots non-têtus ayant l'opinion 0 au temps t . Pour respecter le choix qui est fait dans [11], la moitié des robots non-têtus démarrent avec l'opinion 1 au temps t_0 qui vaut ici, 0. $N_1(0)$ vaut donc $\frac{N-S1-S0}{2}$, arrondi à l'entier inférieur. Arrondir cette valeur peut provoquer un léger déséquilibre dans la situation initiale mais qui ne devrait pas énormément influencer sur la dynamique globale du système. Si $N - S1 - S0$ est un nombre pair, nous pouvons ensuite écrire

$$\bar{P}\left(\frac{N - S1 - S0}{2}, 0\right) = 1 \quad \text{et} \quad \bar{P}(m, 0) = 0 \quad \forall m \neq \frac{N - S1 - S0}{2},$$

où $\bar{P}(m, t)$ est la probabilité que $N_1(t) = m$. Posons $n_0 = \frac{N-S1-S0}{2}$. Selon la master équation, nous obtenons que

$$\frac{\delta \bar{P}(n, t | n_0, 0)}{\delta t} = - \sum_{m \neq n} \bar{W}(m | n, t) \bar{P}(n, t | n_0, 0) + \sum_{m \neq n} \bar{W}(n | m, t) \bar{P}(m, t | n_0, 0). \quad (3.1)$$

L'objectif sera, par la suite, de calculer la valeur de $\bar{W}(m | n, t)$ pour tout n et m entre 1 et $N - S1 - S0$ inclus. Pour pouvoir trouver cette valeur, il faut déterminer la loi selon laquelle le système passe d'un état donné à un autre en un intervalle de temps dt . Pour cela nous allons devoir reprendre l'abstraction selon laquelle les robots se mélangent de façon parfaitement homogène du graphe All-to-All. Nous allons donc considérer que le groupe de robots est suffisamment dense pour que chaque robot en rencontre un autre dans chaque intervalle de temps dt et que, en plus, cela peut être n'importe quel autre robot avec la même probabilité. En considérant cela, la probabilité qu'un robot ayant l'opinion 1 rencontre un robot ayant l'opinion 0 à l'instant t vaut $\frac{N_0(t)}{N-1}$. La probabilité qu'un robot ayant l'opinion 0 rencontre un robot ayant l'opinion 1 à l'instant t vaut $\frac{N_1(t)}{N-1}$. Pour le *Majority model*, la probabilité qu'un robot non-têtu ayant l'opinion 1 rencontre 2 robots ayant l'opinion 0 à l'instant t vaut

$$\frac{N_0(t)(N_0(t) - 1)}{(N - 1)(N - 2)}$$

et la probabilité qu'un robot non-têtu ayant l'opinion 0 rencontre 2 robots ayant l'opinion 1 à l'instant t vaut

$$\frac{N_1(t)(N_1(t) - 1)}{(N - 1)(N - 2)}.$$

Application à l'approche microscopique

Passons à l'approche microscopique, celle qui définit l'état du système comme étant, pour chaque robot i , la valeur de $Op_i(t)$, son opinion en fonction du temps. Pour chacun des robots, nous cherchons à décrire l'évolution de cette variable.

Soit $Op_i(t) : [0, \infty] \times \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ une fonction mesurable. Cette fonction est un processus stochastique discret. Nous utiliserons ici un processus discret car les états possibles du système sont discrets. En effet, chaque robot ne peut être qu'à l'état 1 ou à l'état 0. Ce processus est ainsi assimilable à un processus de Markov. Pour prendre en compte l'influence de l'état initial x_0 dans nos analyses, nous poserons par la suite une probabilité initiale sur chacun des deux états qui sera la même pour chaque robot non-têtu. En prenant cela en compte, nous noterons $P_i(x, t)$ la probabilité que le robot i ait l'opinion x au temps t sachant cette probabilité initiale. Pour pouvoir décrire séparément l'évolution de $P_i(x, t)$ pour chaque robot, considérons l'abstraction supplémentaire selon laquelle la probabilité qu'un robot donné soit dans un état donné est indépendante de l'état effectif des autres robots. La master equation devient ainsi

$$\frac{\delta P_i(1, t)}{\delta t} = -W_i(0|1, t)P_i(1, t) + W_i(1|0, t)P_i(0, t). \quad (3.2)$$

La master equation décrivant l'évolution de $P_i(0, t)$ est évidemment parfaitement symétrique à celle-ci. Pour chaque robot et chaque modèle, il faudra donc construire cette master equation en calculant les valeurs de

$W_i(0|1, t)$ et $W_i(1|0, t)$ en fonction de l'état du reste du système au temps t . Nous ferons intervenir dans nos calculs la matrice d'adjacence du graphe que constituent ces robots, $A(t)$, qui contiendra l'information de la proximité des robots entre eux en fonction du temps.

3.3.2 Adaptation de l'approche microscopique au *Probabilistic model*

Dans le cas du *Probabilistic model*, la probabilité qu'un robot donné change d'opinion dépend des robots qu'il a rencontré dans le passé ; il faudra donc considérer une master equation supplémentaire pour décrire également l'évolution de cette deuxième variable au cours du temps. Les deux types d'états que nous avons à décrire sont les suivants. Le premier est l'opinion du robot qui peut être 1 ou 0. Le second est sa probabilité de changer d'opinion qui peut prendre théoriquement toutes les valeurs de la forme $\frac{k^p}{z^q}$ dans $]0, 1]$, où p et q sont des naturels. En effet, la probabilité de changer d'opinion initiale vaut 1 et elle est, par la suite, multipliée par k ou divisée par z à chaque étape du processus en étant majorée par 1, évidemment. Le problème qui se pose alors est que le nombre d'états atteignables entre deux nombres fixés appartenant à $]0, 1]$ est théoriquement infini à long terme, bien que l'ensemble de ces états soit discret. Cependant, nous pouvons remarquer une propriété intéressante. Ci-dessous se trouvent les différents états atteints en multipliant la probabilité initiale de changer d'opinion p fois par k et en la divisant ensuite q fois par z , sans dépasser 1.

$q \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0.8	0.64	0.512	0.4096	0.3277	0.2621
1	1	1	1	1	1	0.8192	0.6554

Nous pouvons remarquer que $0.8 \simeq 0.8192$. Diviser par z revient "presque" à annuler 4 multiplications par k . Modifions nos paramètres pour faire en sorte que ce soit exactement le cas. Conservons, pour s'éloigner le moins possible des paramètres de [11], le rapport $\frac{k}{z}$ égal à 2. L'égalité que nous souhaitons atteindre s'écrit donc

$$(2z)^n = \frac{(2z)^{n+4}}{z^4} \forall n \in \mathbb{N}$$

$$z = 2^{-\frac{4}{3}} \simeq 0.3969$$

Le nombre de valeurs atteignables entre deux nombres fixés appartenant à $]0, 1]$ est donc désormais fini. L'état m correspond à une probabilité de changer d'opinion égale à k^m , où m est naturel. Notons que notre méthode de choix des paramètres k et z laisse la place à deux degrés de liberté : le ratio $\frac{k}{z}$ et le nombre de multiplications par k qui sont compensées par une division par z .

Il reste à déterminer comment traiter ces deux types d'états (opinion et probabilité de changer d'opinion). Nous avons identifié deux manières de procéder. La première méthode repose sur l'hypothèse que la probabilité de changer d'opinion d'un robot est indépendante de l'opinion de ce robot. Cette méthode ajoute simplement une deuxième master equation au système. Posons $P'_i(y, t)$, la probabilité que le robot i ait une probabilité de changer d'opinion égale à y au temps t . Alors,

$$\frac{\delta P'_i(1, t|1, t_0)}{\delta t} = -W'_i(k|1, t)P'_i(1, t|1, t_0) + \sum_{l=1}^4 W'_i(1|k^l, t)P'_i(k^l, t|1, t_0), \quad (3.3)$$

pour tout m naturel compris entre 1 et 3 inclus,

$$\begin{aligned} \frac{\delta P'_i(k^m, t|1, t_0)}{\delta t} = & -W'_i(k^{m+1}|k^m, t)P'_i(k^m, t|1, t_0) - W'_i(k^0|k^m, t)P'_i(k^m, t|1, t_0) \\ & + W'_i(k^m|k^{m-1}, t)P'_i(k^{m-1}, t|1, t_0) + W'_i(k^m|k^{m+4}, t)P'_i(k^{m+4}, t|1, t_0), \end{aligned}$$

et pour tout m naturel strictement supérieur à 3,

$$\begin{aligned} \frac{\delta P'_i(k^m, t|1, t_0)}{\delta t} = & -W'_i(k^{m+1}|k^m, t)P'_i(k^m, t|1, t_0) - W'_i(k^{m-4}|k^m, t)P'_i(k^m, t|1, t_0) \\ & + W'_i(k^m|k^{m-1}, t)P'_i(k^{m-1}, t|1, t_0) + W'_i(k^m|k^{m+4}, t)P'_i(k^{m+4}, t|1, t_0). \end{aligned}$$

A chaque instant t , il est possible d'estimer la probabilité de changer d'opinion du robot i en calculant l'espérance de cette probabilité selon la formule suivante.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=0}^n k^s P'_i(k^s, t)}{n}$$

Lors des simulations de ce modèle, cette valeur sera approximée en posant la probabilité de changer d'opinion minimum à 10^{-16} , la précision machine. Cette valeur correspond approximativement à k^{160} .

La seconde manière de traiter les deux types d'états prend en compte la dépendance entre l'opinion d'un robot et sa probabilité de changer d'opinion en décrivant l'état d'un robot comme étant la conjonction d'une opinion et d'une probabilité de changer d'opinion. La probabilité que le robot i ait l'opinion x et la probabilité de changer d'opinion y au temps t est alors notée de la manière suivante.

$$\hat{P}_i(x, y, t)$$

Ainsi, nous pouvons écrire pour tout i appartenant à I , l'ensemble des indices des robots non-têtués,

$$P_i(1, t) = \sum_{s=0}^{\infty} \hat{P}_i(1, k^s, t)$$

$$P_i(0, t) = \sum_{s=0}^{\infty} \hat{P}_i(0, k^s, t).$$

La master équation qui décrit l'évolution de ce système en fonction du temps devient, pour tout m naturel et pour tout x et tout y distincts valant 1 ou 0,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \hat{P}_i(x, k^m, t)}{\delta t} = & - \sum_{l \neq m} \hat{W}_i(x, k^l | x, k^m, t) P'_i(x, k^m, t) + \sum_{l \neq m} \hat{W}_i(x, k^m | x, k^l, t) P'_i(x, k^l, t) \\ & - \sum_{l=0}^{\infty} \hat{W}_i(y, k^l | x, k^m, t) P'_i(x, k^m, t) + \sum_{l=0}^{\infty} \hat{W}_i(x, k^m | y, k^l, t) P'_i(y, k^l, t). \end{aligned} \quad (3.4)$$

En effet, les deux premiers termes correspondent aux cas dans lesquels le robot i change sa probabilité de changer d'opinion en conservant l'opinion x . Les deux derniers termes, eux, correspondent aux cas dans lesquels le robot i acquiert l'opinion x en changeant ou non sa probabilité de changer d'opinion.

Ces deux méthodes seront appliquées, ainsi que le *Voter model* et le *Majority model*, aux trois types de configuration des liens entre les robots évoqués à la fin de la section 2.2.

3.3.3 Description des types de configuration des liens entre les robots

Le seul élément qui diffère d'un des types de configuration à l'autre est la matrice d'adjacence, $A(t)$, du graphe que constitue notre ensemble de robots. Nous nommerons le premier, qui considère que les robots se mélangent de manière parfaitement homogène, le graphe All-to-All. Ce graphe est caractérisé par une matrice d'adjacence constante dont chacun des éléments vaut 1 sauf les éléments diagonaux qui valent 0. En effet, un robot ne peut pas s'observer lui-même.

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 1 & . \\ 1 & . & . & . & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous nommerons le second type de configuration, qui considère que les robots ne se déplacent pas et influencent toujours les mêmes robots, le graphe statique. Ce graphe est caractérisé par une matrice d'adjacence constante dont l'élément de la i^{eme} ligne et de la j^{eme} colonne vaut 1 uniquement si les robots i et j

sont adjacents selon la configuration de la figure 3.1, dans un carré de \sqrt{N} robots sur \sqrt{N} robots. Chaque robot est donc connecté à 3, 5 ou 8 robots. Notons que cette configuration est utilisable uniquement pour un nombre carré de robots, ce qui pose une restriction sur la valeur de N , le nombre total de robots.

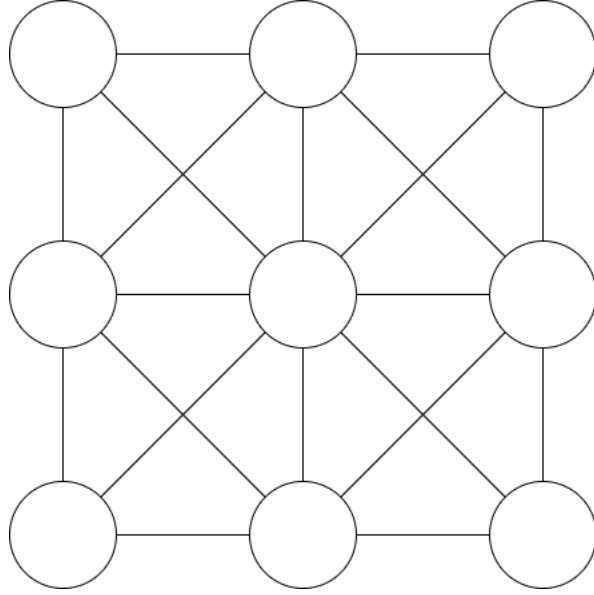


FIGURE 3.1 – Configuration des robots dans le graphe statique.

Nous nommerons le troisième type, qui considère que les robots se déplacent exactement comme dans nos simulations, le graphe dynamique. Ce graphe est caractérisé par une matrice d'adjacence mise à jour à chaque étape du processus d'échange d'opinion en fonction des positions des robots dans la surface sur laquelle ils évoluent, le seul invariant étant les éléments diagonaux, toujours égaux à 0.

Pour simplifier les calculs sans simplifier les modèles, nous allons travailler en temps discret en postulant que, à chaque étape du processus, la probabilité qu'un robot remette son opinion en question plus d'une fois est nulle. Ce postulat est rendu crédible par le fait que nous travaillerons avec des intervalles de temps très courts.

Chapitre 4

Modélisation du *Voter model*

Dans le cas du *Voter model*, un robot non-têtu qui observe un robot d'opinion différente change toujours d'opinion. C'est sur base de cet élément que ce chapitre est construit. Nous y modéliserons la dynamique de l'ensemble de robots respectant cette règle. Les deux approches concernant la définition de ce qu'est un état de ce système seront étudiées. Pour l'approche microscopique, trois graphes différents seront utilisés pour modéliser les liens entre ces robots au cours du temps. Pour chacun des quatres modèles distincts qui découlent de ces considérations, nous présenterons les différents résultats produits par ceux-ci. Ces résultats nous permettront de comparer ces modèles les uns aux autres et de discuter leur pertinence.

4.1 Modélisation via l'approche macroscopique

Commençons par l'approche définissant l'état du système comme étant $N_1(t)$, le nombre de robots non-têtus d'opinion 1. Notons $M_0(t)$, le nombre de robots ayant l'opinion 0 et la changeant pour l'opinion 1 dans l'intervalle de temps $[t, t + dt]$ et $M_1(t)$, le nombre de robots ayant l'opinion 1 et la changeant pour l'opinion 0 dans l'intervalle de temps $[t, t + dt]$. Notons également $\bar{P}_V(M_0 = l)$ et $\bar{P}_V(M_1 = l)$ les probabilités, selon le *Voter model*, que respectivement M_0 soit égal à l et M_1 soit égal à l . Ces probabilités suivent une loi binomiale, respectivement

$$C_{N_0(t)}^l \left(\frac{N_1(t) + S1}{N-1} \right)^l \left(1 - \frac{N_1(t) + S1}{N-1} \right)^{N_0(t)-l} \quad \text{et} \quad C_{N_1(t)}^l \left(\frac{N_0(t) + S0}{N-1} \right)^l \left(1 - \frac{N_0(t) + S0}{N-1} \right)^{N_1(t)-l}.$$

La probabilité que le système passe de l'état $N_1(t) = n$ à l'état $N_1(t + dt) = m$ est égale à la probabilité que la différence entre M_0 et M_1 soit égale à la différence entre m et n . Or,

$$\bar{P}_V(M_0 - M_1 = m - n) = \sum_i \bar{P}_V(M_0 = i) \bar{P}_V(M_1 = i - m + n),$$

où $M_0(t) \in [0, N_0(t)]$ et $M_1(t) \in [0, N_1(t)]$ car seuls les robots non-têtus peuvent changer d'opinion. Donc

$$\begin{aligned} i &\geq \max\{0, m - n\} \\ i &\leq \min\{N_0(t), N_1(t) + m - n\} \end{aligned}$$

Nous obtenons donc finalement que $\bar{W}(m|N_1(t), t)$ de l'équation 3.1 est égal à

$$\sum_i C_{N_0(t)}^i \left(\frac{N_1(t) + S1}{N-1} \right)^i \left(1 - \frac{N_1(t) + S1}{N-1} \right)^{N_0(t)-i} C_{N_1(t)}^{i-m+N_1(t)} \left(\frac{N_0(t) + S0}{N-1} \right)^{i-m+N_1(t)} \left(1 - \frac{N_0(t) + S0}{N-1} \right)^{-i+m}.$$

Nous avons calculé l'évolution de la probabilité des différents états en fonction du temps pour trois paramétrisations différentes de $S1$ et $S0$, avec à chaque fois le même état initial n_0 tel que défini précédemment.

Dans la figure 4.1 se trouve la répartition des probabilités respectives des différentes proportions de robots non-têtus d'opinion 1. Nous y trouvons la médiane, le quantile à 5 pourcents et le quantile à 95 pourcents en courbes épaisses. Ces résultats y sont comparés avec les résultats des simulations de la section 2.2 en courbes fines. Nous constatons sur chacun des trois graphiques que la majorité des courbes fines sont effectivement capturées par les quantiles à 5 pourcents et 95 pourcents. Ce modèle semble décrire correctement la dynamique d'opinions des robots de notre modélisation numérique.

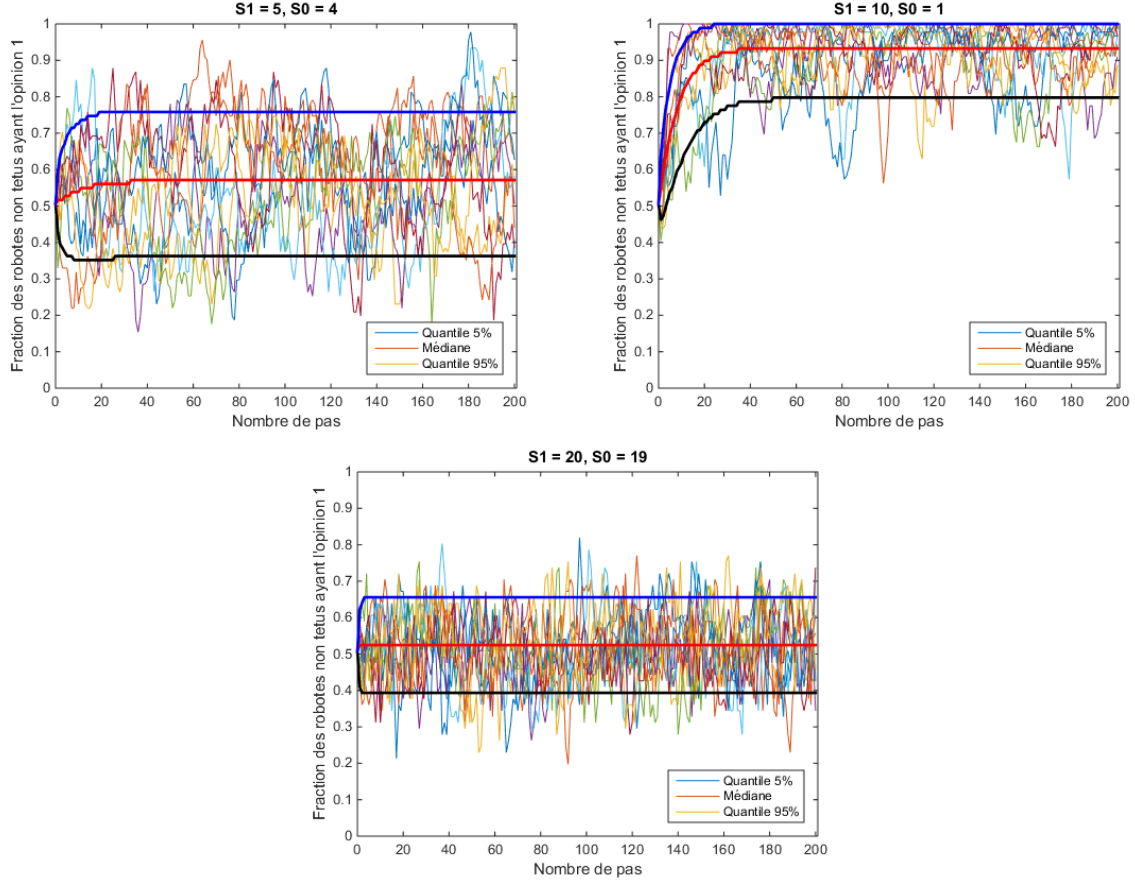


FIGURE 4.1 – Evolution de la répartition des probabilités respectives des différentes proportions de robots non-têtus d'opinion 1 en fonction du temps, selon le modèle macroscopique (courbes épaisses) et évolution de la proportion des robots non-têtus ayant l'opinion 1 en fonction du temps selon les simulations de la section 2.2 (courbes fines), dans le *Voter model*, en fonction de la valeur de $S1$ et $S0$.

4.2 Modélisation vie l'approche microscopique

Passons à l'approche définissant l'état du système comme étant l'ensemble des opinions de chaque robot. Dans le *Voter model*, pour tout i appartenant à I , l'ensemble des indices des robots non-têtus, les coefficients W de l'équation 3.2 peuvent s'écrire

$$W_i(0|1, t) = \begin{cases} \lambda \frac{a_i P(0, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} & , \text{ si } \sum_{j \neq i} A_{ij} \neq 0, \\ 0 & , \text{ sinon,} \end{cases}$$

$$W_i(1|0, t) = \begin{cases} \lambda \frac{a_i P(1, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} & , \text{ si } \sum_{j \neq i} A_{ij} \neq 0, \\ 0 & , \text{ sinon,} \end{cases}$$

où λ est la probabilité qu'un robot en observe un autre durant un intervalle de temps dt , a_i est la ligne i de A , $P(x, t)$ est le vecteur de la probabilité de chaque robot d'avoir l'opinion x au temps t et $\frac{a_i P(x, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}}$ est donc l'espérance de la probabilité que le robot observé ait l'opinion x au temps t . Pour tout i appartenant à I , la master equation 3.2 décrivant l'évolution de la probabilité que le robot i ait l'opinion 1 devient donc

$$\begin{aligned} \frac{\delta P_i(1, t)}{\delta t} &= -\lambda \frac{a_i P(0, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} P_i(1, t) + \lambda \frac{a_i P(1, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} P_i(0, t) \\ &= \frac{\lambda}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} [-a_i (I_v - P(1, t)) P_i(1, t) + a_i P(1, t) (1 - P_i(1, t))] \\ &= \frac{\lambda}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} [-a_i I_v P_i(1, t) + a_i P(1, t) P_i(1, t) + a_i P(1, t) - a_i P(1, t) P_i(1, t)] \\ &= \frac{\lambda}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} [-\sum_{j \neq i} A_{ij} P_i(1, t) + a_i P(1, t)] \end{aligned}$$

$$\frac{\delta P_i(1, t)}{\delta t} = -\lambda P_i(1, t) + \frac{\lambda}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} a_i P(1, t), \quad (4.1)$$

où I_v désigne le vecteur identité contenant uniquement la valeur 1. Dans le cas des robots têtus donc pour tout j appartenant à T , la master equation reste

$$\frac{\delta P_j(1, t)}{\delta t} = 0$$

puisque l'opinion d'un robot têtu n'évolue pas.

4.2.1 Modélisation via le graphe All-to-All

Le *Voter model* appliqué sur le graphe All-to-All, $\sum_{j \neq i} A_{ij}$ est égal à $N - 1$ et nous pouvons réécrire les équations 4.1 sous la forme matricielle suivante.

$$\begin{pmatrix} P_1(1, t + dt) \\ \vdots \\ P_N(1, t + dt) \end{pmatrix} = L_A \begin{pmatrix} P_1(1, t) \\ \vdots \\ P_N(1, t) \end{pmatrix},$$

où

$$L_A = \begin{matrix} & \begin{matrix} i & & & & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{\dot{\lambda}}{N-1} & 1-\lambda & \frac{\dot{\lambda}}{N-1} & \frac{\dot{\lambda}}{N-1} & \frac{\dot{\lambda}}{N-1} & \frac{\dot{\lambda}}{N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{matrix},$$

i
 j

où i est un indice de robot non-tête et j est un indice de robot tête. Remarquons que, quand il n'y a aucun robot tête, L_A est égal à la matrice laplacienne du graphe multipliée par $\frac{-\lambda}{N-1}$ et à laquelle on a additionné la matrice identité. Dans le graphe All-to-All, tous les robots non-têtes ont leur opinion décrite par la même master equation car ils sont adjacents aux mêmes robots. De plus, comme chaque robot non-tête est initialisé avec la même probabilité d'avoir l'opinion 1, alors pour tout i et tout j appartenant à I et pour tout t supérieur à t_0 , l'instant de l'état initial,

$$P_i(1, t) = P_j(1, t).$$

La master equation 4.1 peut, dans ce cas-ci, se réécrire pour tout i appartenant à I ,

$$\begin{aligned} \frac{\delta P_i(1, t)}{\delta t} &= -\lambda P_i(1, t) + \frac{\lambda}{N-1} a_i P(1, t) \\ &= -\lambda P_i(1, t) + \frac{\lambda}{N-1} ((N-1-S1-S0)P_i(1, t) + S1) \\ &= \frac{\lambda}{N-1} ((-S1-S0)P_i(1, t) + S1). \end{aligned}$$

Annulons le membre de droite de cette équation pour trouver l'équilibre de ce système en fonction de N , $S1$ et $S0$.

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{N-1} ((-S1-S0)P_i(1, t) + S1) &= 0 \\ P_i(1, t) &= \frac{S1}{S1+S0} \end{aligned}$$

Cet équilibre peut également être retrouvé en calculant le vecteur propre de la matrice L_A . Dans un système de N robots dont $S1$ têtes d'opinion 1 et $S0$ têtes d'opinion 0 et dont l'évolution des opinions est régie par le *Voter model*, selon le graphe All-to-All, les robots non-têtes tendent à avoir une probabilité d'opinion 1 égale au rapport entre le nombre de robots têtes d'opinion 1 et le nombre de robots têtes total. Il n'y a donc pas de consensus atteint par cet ensemble de robots quand il existe au moins un robot tête de chaque opinion. Il est intéressant de remarquer que ce résultat est indépendant du nombre de robots total. Nous avons illustré cet équilibre en simulant plusieurs fois l'évolution de la probabilité qu'un robot non-tête donné ait l'opinion 1 au cours du temps. Nous avons varié les valeurs de $S1$ et $S0$ et la probabilité d'avoir l'opinion 1 initiale des robots non-têtes. Dans la figure 4.2, nous pouvons observer ces évolutions. Peu importe la probabilité initiale, l'équilibre est toujours atteint après un temps suffisamment long (avec une tolérance de 10^{-4}). Cet équilibre vaut respectivement $\frac{5}{5+4}$, $\frac{10}{10+1}$ et $\frac{20}{20+19}$.

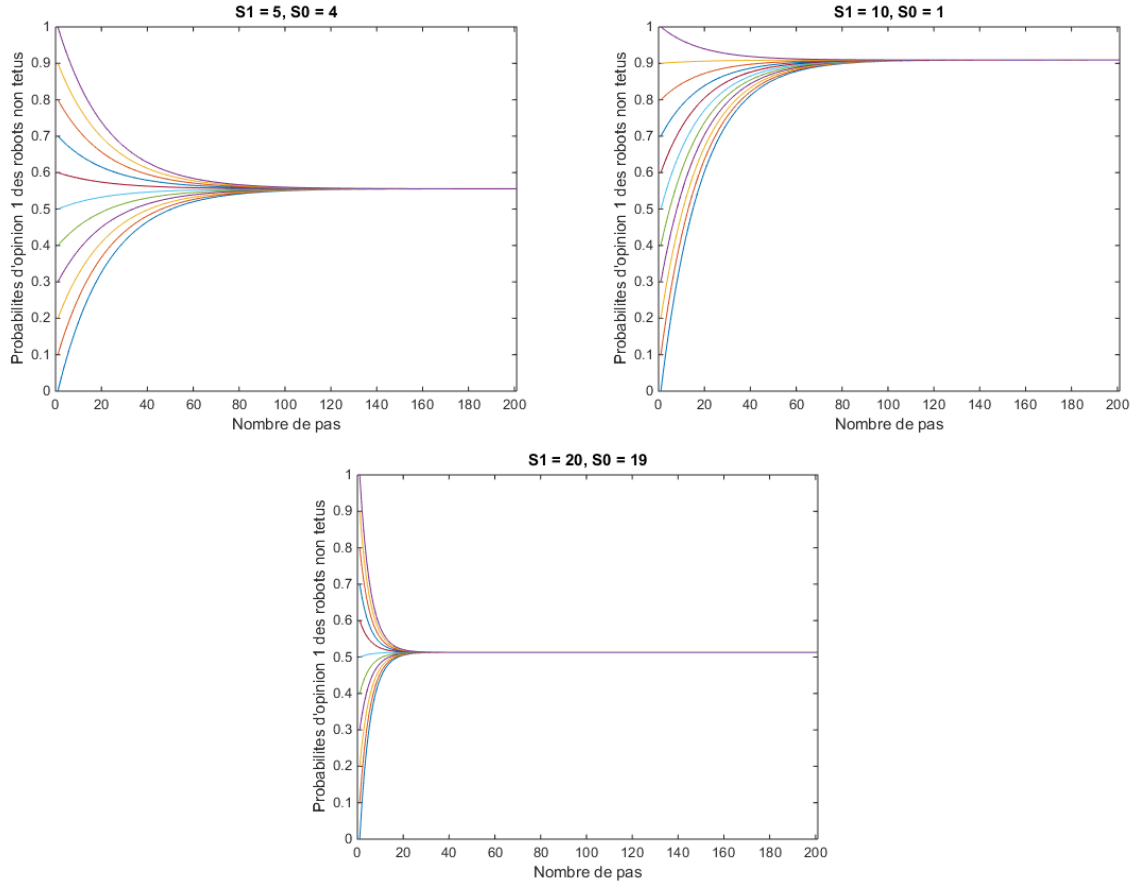


FIGURE 4.2 – Evolution de la probabilité d'un robot non-tête d'avoir l'opinion 1 au cours du temps en fonction de la valeur de S_0 et S_1 , dans le *Voter model*, selon le graphe All-to-All.

4.2.2 Modélisation via le graphe statique

Le *Voter model* appliqué sur le graphe statique, l'équilibre est différent pour chaque robot non-tête. Revenons donc à la master equation sous sa forme plus générale, 4.1. Pour tout i appartenant à I ,

$$\frac{\delta P_i(1, t)}{\delta t} = -\lambda P_i(1, t) + \frac{\lambda}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} a_i P(1, t).$$

Nous pouvons réécrire ces équations sous la forme matricielle suivante.

$$\begin{pmatrix} P_1(1, t + dt) \\ \vdots \\ P_N(1, t + dt) \end{pmatrix} = L_S \begin{pmatrix} P_1(1, t) \\ \vdots \\ P_N(1, t) \end{pmatrix},$$

où

$$L_S = \begin{matrix} & \begin{matrix} i & j & k & l \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 - \lambda & \cdot & \frac{\lambda}{\sum_{m \neq i} A_{im}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{matrix},$$

où i est un indice de robot non-têtu, j est un indice de robot têtu, k est un indice de robot adjacent au robot i et l est un indice de robot non-adjacent au robot i . Remarquons de nouveau que, quand il n'y a aucun robot têtu, L_S est égal à la matrice laplacienne du graphe dont chaque élément est divisé par l'élément diagonal de sa ligne puis multiplié par $-\lambda$ et à laquelle on a additionné la matrice identité.

Pour un robot i non-têtu fixé, annulons le membre de droite de l'équation 4.1 pour trouver l'équilibre de ce système.

$$\begin{aligned} -\lambda P_i(1, t) + \frac{\lambda}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} a_i P(1, t) &= 0 \\ P_i(1, t) &= \frac{a_i P(1, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} \end{aligned}$$

A l'équilibre, pour tout i , la valeur de $P_i(1, t)$ est l'élément i d'un vecteur propre de la matrice L_S . Dans un système dont l'évolution des opinions est régie par le *Voter model*, selon le graphe statique, les robots non-têtus tendent à avoir une probabilité d'opinion 1 égale à la moyenne des probabilités d'opinion 1 de leurs voisins. Dans un graphe statique, la position des robots têtus a énormément d'influence sur l'équilibre global du système. Nous avons illustré cela avec trois configurations différentes, pour des valeurs de $S1$ et $S0$ égales à respectivement 5 et 4. Dans la figure 4.3, chaque robot est représenté par un carré gris. Sa nuance de gris correspond à sa probabilité d'avoir l'opinion 1 à la fin du processus. Les robots têtus sont marqués d'un point de couleur, vert pour ceux ayant l'opinion 1 et rouge pour ceux ayant l'opinion 0. Ces équilibres finaux sont indépendants de la probabilité d'avoir l'opinion 1 initiale des robots non-têtus. Nous pouvons d'ailleurs en déduire que la matrice L_S ne possède qu'un seul vecteur propre. Dans cette figure, nous pouvons voir que certaines configurations aboutissent à des zones dans lesquelles l'opinion 1 est très majoritaire ou très minoritaire. De nouveau, il n'y a donc pas de consensus atteint par cet ensemble de robots quand il existe au moins un robot têtu de chaque opinion. Les moyennes des probabilités d'opinion 1 des robots non-têtus sont les suivantes. Pour le graphe en haut à gauche la moyenne vaut 0.5359, pour le graphe en haut à droite la moyenne vaut 0.4913 et pour le graphe d'en bas la moyenne vaut 0.6607. Cette moyenne est donc relativement variable pour une même paramétrisation de $S1$ et $S0$. Il semble que ce modèle corresponde donc en partie aux simulations de la section 2.2 mais il faudrait pouvoir faire une moyenne des simulations de chaque configuration possible des robots têtus pour pouvoir les comparer.

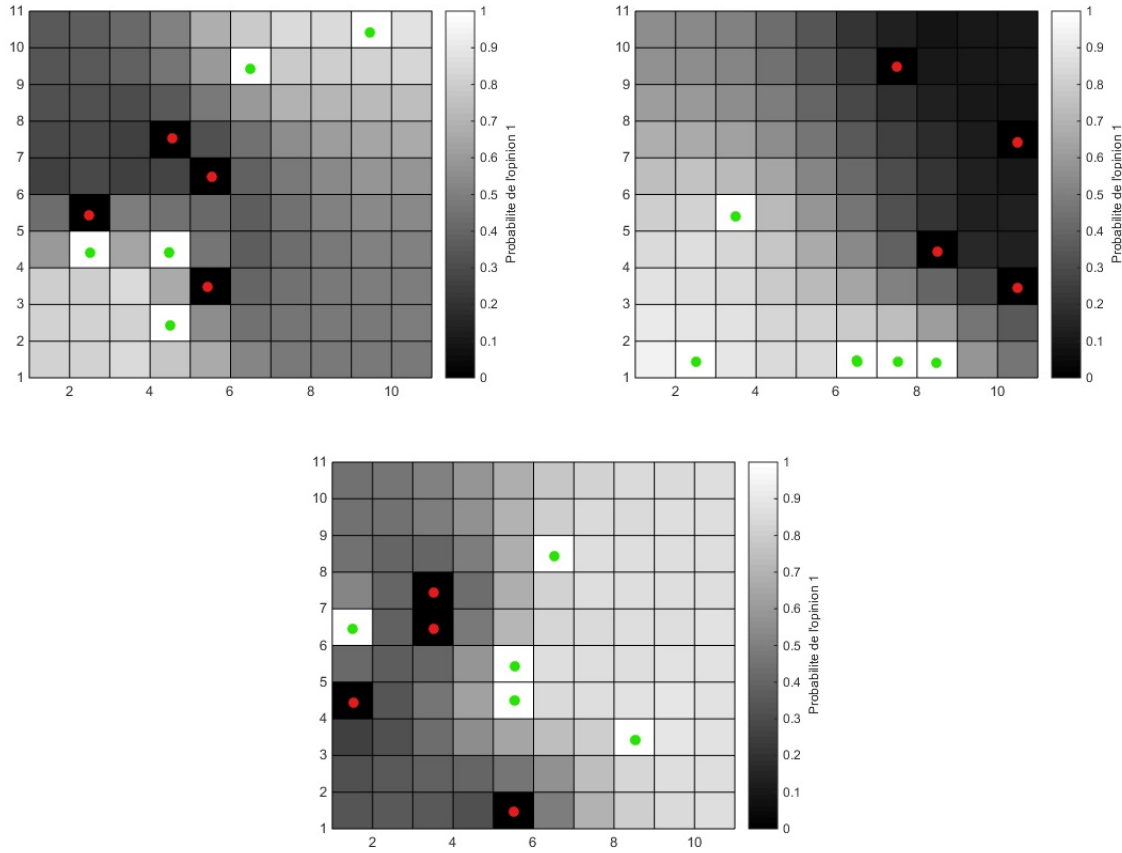


FIGURE 4.3 – Probabilité de chaque robot d’avoir l’opinion 1 à la fin du processus pour trois configurations différents des robots têtus (d’opinion 1 en vert et d’opinion 0 en rouge), dans le *Voter model*, selon le graphe statique.

4.2.3 Modélisation via le graphe dynamique

Le *Voter model* appliqué sur le graphe dynamique, la matrice d’adjacence évolue constamment et aléatoirement. Il ne peut donc pas exister d’équilibre fixe car cet équilibre évolue en fonction de cette matrice. Pour ce graphe, nous devons donc nous contenter de simulations de l’évolution des probabilités d’opinion 1 de chaque robot. Nous avons effectué 5 simulations pour chacune des 11 probabilités d’opinion 1 initiales pour pouvoir juger de l’influence du caractère aléatoire de la matrice d’adjacence sur l’évolution de ce système. Nous avons également varié les valeurs de $S1$ et $S0$. Dans la figure 4.4, nous pouvons observer les différentes simulations de cette évolution. L’allure de chacun de ces trois graphiques ressemble fortement à celle des graphes de la figure 4.2, du graphe All-to-All. De plus, la moyenne des moyennes des probabilités d’opinion 1 finales des différentes simulations vaut respectivement pour chaque graphique,

$$0.5605 \simeq \frac{5}{5+4},$$

$$0.9089 \simeq \frac{10}{10+1},$$

$$0.5129 \simeq \frac{20}{20+19}.$$

Nous pouvons donc raisonnablement soupçonner que le graphe dynamique produit des dynamiques d'opinions très proches de celles du graphe All-to-All, avec des équilibres variants faiblement autour de ceux de celui-ci.

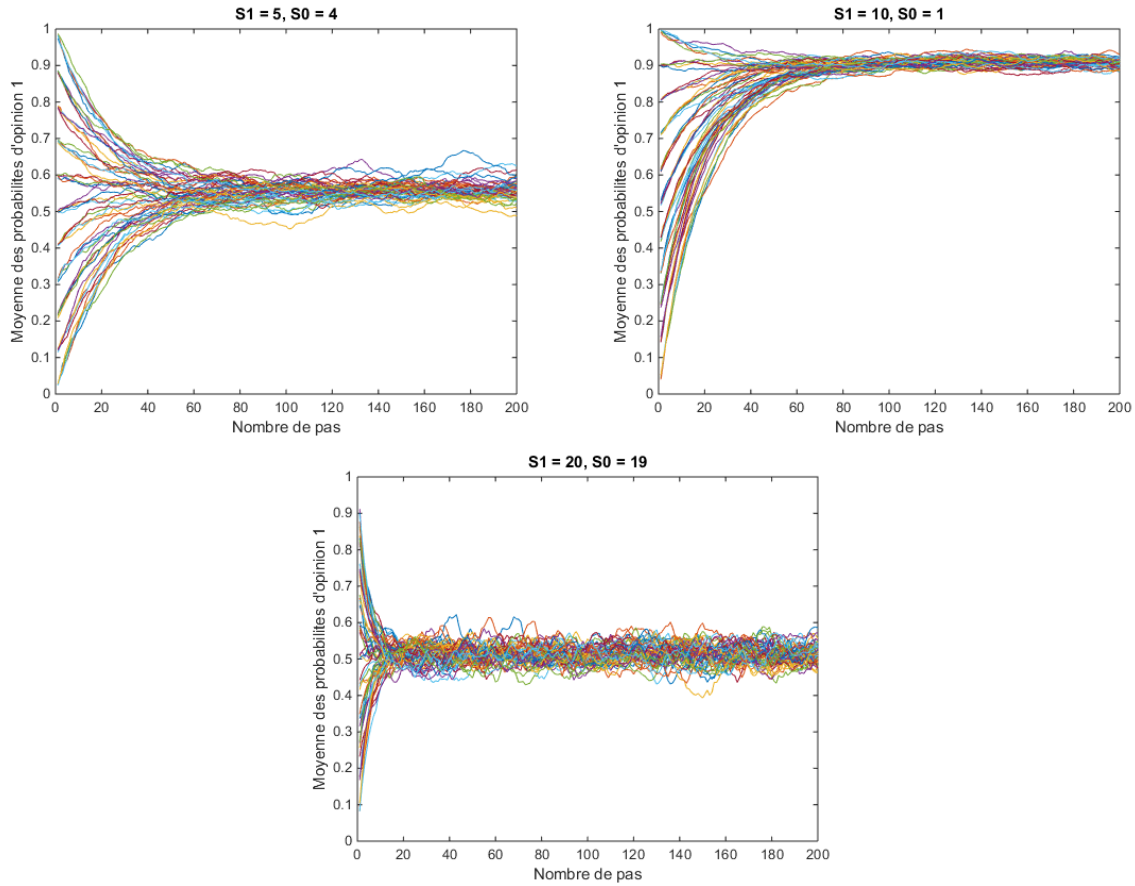


FIGURE 4.4 – Evolution de la moyenne des probabilités des robots non-têtus d'avoir l'opinion 1 au cours du temps en fonction de la valeur de $S0$ et $S1$, dans le *Voter model*, selon le graphe dynamique.

Pour appuyer cette intuition, remarquons que, si le déplacement des robots est suffisamment rapide par rapport à la vitesse à laquelle ils remettent en question leur opinion, la densité de présence de chaque robot dans l'espace dans lequel ils évoluent converge rapidement vers une densité uniforme. Dans ce cas, nous pourrions écrire que la probabilité que le robot i soit adjacent au robot j est égale à

$$p \simeq \frac{1.2^2 \pi}{10^2},$$

où $10^2 m^2$ est l'aire de la surface dans laquelle évoluent les robots, $1.2m$ est la portée de la vision d'un robot et $1.2^2 \pi m^2$ est donc approximativement l'aire de la surface dans laquelle un robot j doit se trouver pour être observable par un robot i (approximativement car cela peut valoir jusqu'à 4 fois moins quand le robot est au bord de la surface, mais cela n'a que peu d'importance pour la suite de l'analyse). Par conséquent, nous pourrions écrire également que la probabilité que le robot i ne soit adjacent à aucun robot est égale à $(1 - p)^{N-1}$ et que la probabilité qu'il soit adjacent à au moins 1 robot est égale à $1 - (1 - p)^{N-1}$. Ainsi, la probabilité que le robot i soit adjacent au robot j et qu'il l'observe lui parmi tous les autres robots qui lui sont adjacents serait égale à

$$\frac{1 - (1 - p)^{N-1}}{N - 1}.$$

Or, si N est beaucoup plus grand que 1, la valeur de $(1 - p)^{N-1}$ est proche de 0, ce qui signifie que

$$\frac{1 - (1 - p)^{N-1}}{N - 1} \simeq \frac{1}{N - 1}.$$

Autrement dit, si l'ensemble de robots est suffisamment dense et qu'ils se déplacent suffisamment rapidement, le graphe dynamique est effectivement similaire au graphe All-to-All.

Comparaison au système initial

Nous voudrions comparer qualitativement les résultats du graphe dynamique avec ceux des simulations du système initial réalisées dans la section 2.2. Pour cela, nous avons effectué 5 simulations du système initial en initialisant 30 pourcents des opinions des non-têtus à 1 et 5 simulations du système initial en initialisant 70 pourcents des opinions des non-têtus à 1. Nous avons réalisé tout cela pour chacune des trois paramétrisations de $S1$ et $S0$ ci-dessus. De plus, pour isoler l'influence des déplacements aléatoires des robots de l'influence des observations aléatoires des robots, nous avons fixé, pour chaque groupe de 5 simulations, un seul enchainement de déplacements. Les robots se déplaceront toujours de la même manière. Nous avons également conservé cet enchainement de déplacements pour effectuer les simulations du graphe dynamique. Cela permet une comparaison uniquement centrée sur l'évolution des opinions sans influence du déplacement. Dans la figure 4.5, nous pouvons remarquer que chacun des trois graphiques confirme l'efficacité du graphe dynamique à calculer la moyenne des probabilités d'avoir l'opinion 1 de chaque robot non-têtu. En effet, les courbes noires représentent l'évolution des moyennes des probabilités d'avoir l'opinion 1 de chaque robot. Les courbes de couleur, quant à elles, représentent le pourcentage de robots ayant effectivement l'opinion 1. Autrement dit, les courbes de couleur représentent une estimation de la probabilité d'un robot donné d'avoir l'opinion 1. En conséquence, les courbes noires sont une estimation de la moyenne des cinq courbes de couleur associées. A long terme, à droite de chaque graphique, les courbes noires passent à peu près au milieu du nuage de l'ensemble des courbes de couleur.

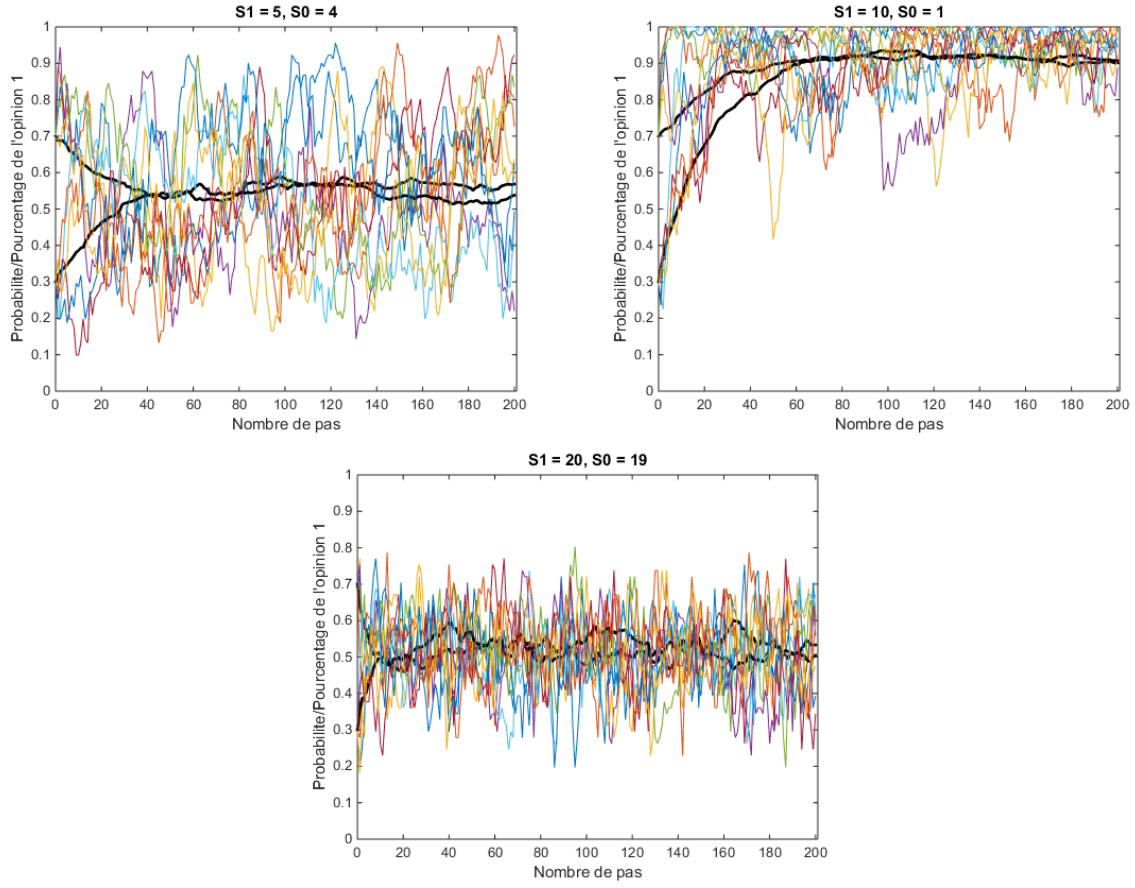


FIGURE 4.5 – Evolution de la moyenne des probabilités des robots non-têtus d’avoir l’opinion 1 au cours du temps (en noir) et évolution du pourcentage de robots non-têtus ayant l’opinion 1 au cours du temps selon les simulations de la section 2.2 (en couleur), dans le *Voter model*, selon le graphe dynamique, en fonction de la valeur de $S1$ et $S0$.

Les quatre modèles présentés et appliqués dans ce chapitre ont fourni des résultats relativement satisfaisant et cohérents entre eux. Cela est de bonne augure pour la modélisation du *Probabilistic model* qui reste l’objectif principal de ce mémoire.

Chapitre 5

Modélisation du *Majority model*

Dans le cas du *Majority model*, un robot non-têtu qui observe deux robots change d'opinion uniquement quand ces robots ont tous les deux une opinion différente de la sienne. C'est sur base de cet élément que ce chapitre est construit. Nous y modéliserons la dynamique de l'ensemble de robots respectant cette règle. Les deux approches concernant la définition de ce qu'est un état de ce système seront étudiées. Pour l'approche microscopique, seuls deux graphes différents seront utilisés pour modéliser les liens entre ces robots au cours du temps. En effet, le *Majority model* étant plus complexe que le *Voter model* mais n'étant pas l'objectif principal de ce mémoire, nous ne présenterons pas les résultats du graphe dynamique appliqué au *Majority model*. De plus, nous avons vu que le graphe All-to-All semble être une bonne approximation du graphe dynamique et cela limite d'autant plus l'intérêt que pourraient avoir ces résultats dans ce mémoire. Donc, pour trois de nos quatre modèles, nous présenterons les différents résultats produits par ceux-ci. Ces résultats nous permettront de comparer ces modèles les uns aux autres et de discuter leur pertinence.

5.1 Modélisation via l'approche macroscopique

Commençons par l'approche définissant l'état du système comme étant le nombre de robots non-têtus d'opinion 1. Notons $\bar{P}_M(M_0 = l)$ et $\bar{P}_M(M_1 = l)$ les probabilités, selon le *Majority model*, que respectivement M_0 , le nombre de robots ayant l'opinion 0 et la changeant pour l'opinion 1 dans l'intervalle de temps $[t, t + dt]$, et M_1 , le nombre de robots ayant l'opinion 1 et la changeant pour l'opinion 0 dans l'intervalle de temps $[t, t + dt]$, soient égal à l . Ces probabilités suivent une loi binomiale, respectivement

$$C_{N_0(t)}^l \left(\frac{(N_1(t) + S1)(N_1(t) + S1 - 1)}{(N - 1)(N - 2)} \right)^l \left(1 - \frac{(N_1(t) + S1)(N_1(t) + S1 - 1)}{(N - 1)(N - 2)} \right)^{N_0(t) - l}$$

et

$$C_{N_1(t)}^l \left(\frac{(N_0(t) + S0)(N_0(t) + S0 - 1)}{(N - 1)(N - 2)} \right)^l \left(1 - \frac{(N_0(t) + S0)(N_0(t) + S0 - 1)}{(N - 1)(N - 2)} \right)^{N_1(t) - l}.$$

La probabilité que le système passe de l'état $N_1(t) = n$ à l'état $N_1(t + dt) = m$ est égale à la probabilité que la différence entre M_0 et M_1 soit égale à la différence entre m et n . Or,

$$\bar{P}_M(M_0 - M_1 = m - n) = \sum_i \bar{P}_M(M_0 = i) \bar{P}_M(M_1 = i - m + n),$$

où $M_0(t) \in [0, N_0(t)]$ et $M_1(t) \in [0, N_1(t)]$ car seuls les robots non-têtus peuvent changer d'opinion. Donc

$$\begin{aligned} i &\geq \max\{0, m - n\} \\ i &\leq \min\{N_0(t), N_1(t) + m - n\} \end{aligned}$$

Nous obtenons donc finalement que $\overline{W}(m|N_1(t), t)$ de l'équation 3.1 est égal à

$$\sum_i [C_{N_0(t)}^i \left(\frac{(N_1(t)+S1)(N_1(t)+S1-1)}{(N-1)(N-2)} \right)^i \left(1 - \frac{(N_1(t)+S1)(N_1(t)+S1-1)}{(N-1)(N-2)} \right)^{N_0(t)-i} \\ C_{N_1(t)}^{i-m+N_1(t)} \left(\frac{(N_0(t)+S0)(N_0(t)+S0-1)}{(N-1)(N-2)} \right)^{i-m+N_1(t)} \left(1 - \frac{(N_0(t)+S0)(N_0(t)+S0-1)}{(N-1)(N-2)} \right)^{-i+m}].$$

Nous avons calculé l'évolution de la probabilité des différents états en fonction du temps pour trois paramétrisations différentes de $S1$ et $S0$, avec à chaque fois le même état initial n_0 tel que défini précédemment. Dans la figure 5.1 se trouve la répartition des probabilités respectives des différentes proportions de robots non-têtus d'opinion 1. Nous y trouvons la médiane, le quantile à 5 pourcents et le quantile à 95 pourcents en courbes épaisses. Ces résultats y sont comparés avec les résultats des simulations de la section 2.2 en courbes fines. Nous constatons, sur le graphique en haut à gauche, que à court terme la médiane ne semble pas positionnée correctement par rapport à l'ensemble des courbes mais que ce problème est corrigé à long terme. La cause de cette différence est probablement l'abstraction selon laquelle tous les robots non-têtus peuvent changer d'opinion durant chaque intervalle de temps. Dans les faits, l'ensemble de robots n'est pas assez dense pour garantir cela. C'est d'ailleurs pour cela qu'il s'agit bien d'une abstraction. Sur le graphique en haut à droite, le problème est similaire mais nous pouvons observer une courbe qui descend bien plus bas que le quantile à 95 pourcents. Ce pourrait être un résultat inhabituel mais il est également possible que ce soit le signe d'une limitation du modèle. Sur le graphique du bas, même à long terme, la médiane semble mal positionnée. Il semble donc que ce modèle ne corresponde donc effectivement pas parfaitement à la réalité.

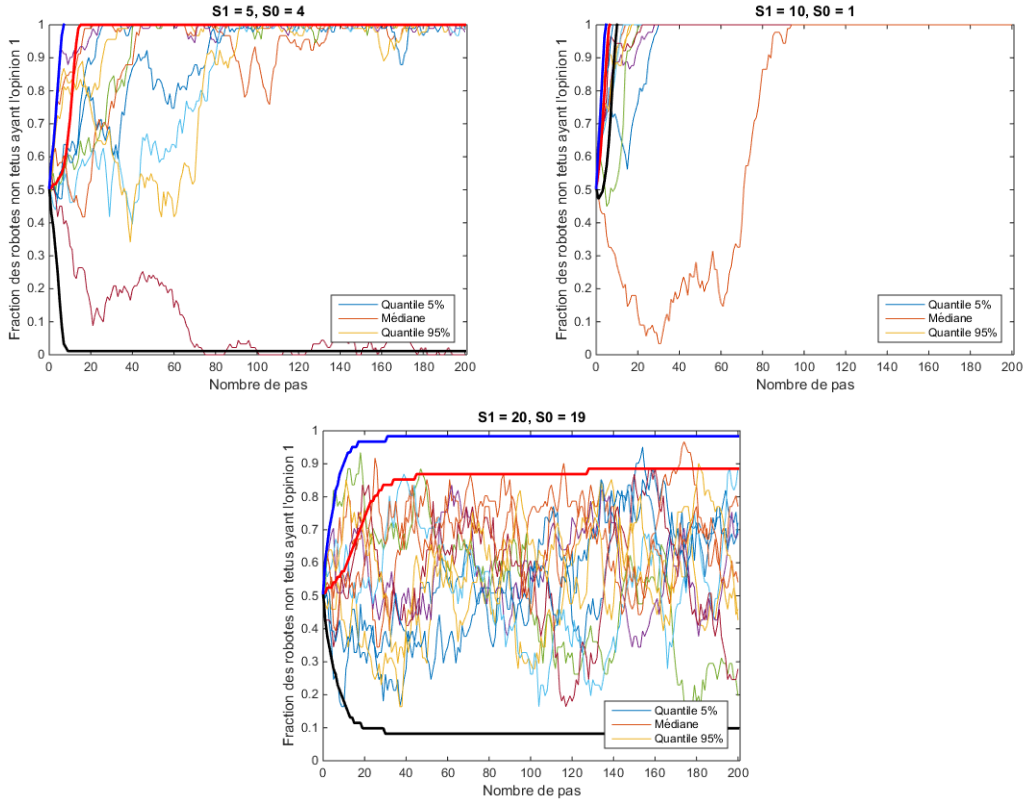


FIGURE 5.1 – Evolution de la répartition des probabilités respectives des différentes proportions de robots non-têtus d'opinion 1 en fonction du temps, selon le modèle macroscopique (courbes épaisses) et évolution de la poportion des robots non-têtus ayant l'opinion 1 en fonction du temps selon les simulations de la section 2.2 (courbes fines), dans le *Majority model*, en fonction de la valeur de $S1$ et $S0$.

5.2 Modélisation via l'approche microscopique

Passons à l'approche définissant l'état du système comme étant l'ensemble des opinions de chaque robot. Dans le *Majority model*, pour tout i appartenant à I , l'ensemble des indices des robots non-têtus, les coefficients W de l'équation 3.2 peuvent s'écrire

$$W_i(0|1, t) = \begin{cases} \lambda \frac{\sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} P_j(0, t) P_l(0, t) A_{ij} A_{il}}{2 \sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} A_{ij} A_{il}} & , \text{ si } \sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} A_{ij} A_{il} \neq 0, \\ 0 & , \text{ sinon,} \end{cases}$$

$$W_i(1|0, t) = \begin{cases} \lambda \frac{\sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} P_j(1, t) P_l(1, t) A_{ij} A_{il}}{2 \sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} A_{ij} A_{il}} & , \text{ si } \sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} A_{ij} A_{il} \neq 0, \\ 0 & , \text{ sinon,} \end{cases}$$

où λ est la probabilité qu'un robot en observe d'autres durant un intervalle de temps dt , $P_i(x, t)$ est la probabilité que le robot i ait l'opinion x au temps t , $P_j(x, t) P_l(x, t) A_{ij} A_{il}$ est la probabilité que les robots j et l soient à la fois adjacents au robot i et d'opinion x au temps t et $\frac{\sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} P_j(x, t) P_l(x, t) A_{ij} A_{il}}{2 \sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} A_{ij} A_{il}}$ est donc l'espérance de la probabilité que les deux robots observés aient l'opinion x au temps t . Pour tout i appartenant à I , la master equation 3.2 décrivant l'évolution de la probabilité que le robot i ait l'opinion 1 devient donc

$$\begin{aligned} \frac{\delta P_i(1, t)}{\delta t} &= -\lambda \frac{\sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} P_j(0, t) P_l(0, t) A_{ij} A_{il}}{2 \sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} A_{ij} A_{il}} P_i(1, t) + \lambda \frac{\sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} P_j(1, t) P_l(1, t) A_{ij} A_{il}}{2 \sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} A_{ij} A_{il}} P_i(0, t) \\ &= \frac{\lambda}{2 \sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} A_{ij} A_{il}} [\sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} (-P_j(0, t) P_l(0, t) P_i(1, t) + P_j(1, t) P_l(1, t) P_i(0, t)) A_{ij} A_{il}] \\ &= \frac{\lambda}{2 \sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} A_{ij} A_{il}} [\sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} (-(1 - P_j(1, t))(1 - P_l(1, t)) P_i(1, t) \\ &\quad + P_j(1, t) P_l(1, t)(1 - P_i(1, t))) A_{ij} A_{il}] \\ &= \frac{\lambda}{2 \sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} A_{ij} A_{il}} [\sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} (-(1 - P_j(1, t) - P_l(1, t) + P_j(1, t) P_l(1, t)) P_i(1, t) \\ &\quad + P_j(1, t) P_l(1, t)(1 - P_i(1, t))) A_{ij} A_{il}] \\ &= \frac{\lambda}{2 \sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} A_{ij} A_{il}} [\sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} (-P_i(1, t) + P_j(1, t) P_i(1, t) + P_l(1, t) P_i(1, t) \\ &\quad - P_j(1, t) P_l(1, t) P_i(1, t) + P_j(1, t) P_l(1, t) - P_j(1, t) P_l(1, t) P_i(1, t)) A_{ij} A_{il}] \\ &= \frac{\lambda}{2 \sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} A_{ij} A_{il}} [\sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} (-P_i(1, t) + P_j(1, t) P_i(1, t) + P_l(1, t) P_i(1, t) \\ &\quad - 2P_j(1, t) P_l(1, t) P_i(1, t) + P_j(1, t) P_l(1, t)) A_{ij} A_{il}]. \end{aligned}$$

Dans le cas des robots têtus donc pour tout j appartenant à T , la master equation reste

$$\frac{\delta P_j(1, t)}{\delta t} = 0$$

puisque l'opinion d'un robot têtu n'évolue pas. Dans le cas du graphe All-to-All et du graphe dynamique, il est possible d'effectuer une analyse supplémentaire. Regardons ce qu'il se passe quand il n'y a aucun robot têtu, c'est à dire quand, dans ces deux graphes, pour tout i , pour tout j et pour tout t ,

$$P_i(1, t) = P_j(1, t).$$

La master equation devient pour tout i ,

$$\frac{\delta P_i(1, t)}{\delta t} = \frac{\lambda}{2 \sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} A_{ij} A_{il}} [\sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} (-P_i(1, t) + 3P_i(1, t)^2 - 2P_i(1, t)^3) A_{ij} A_{il}].$$

Annulons le membre de droite de cette équation pour trouver l'équilibre de ce système.

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2 \sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} A_{ij} A_{il}} [\sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} (-P_i(1, t) + 3P_i(1, t)^2 - 2P_i(1, t)^3) A_{ij} A_{il}] &= 0 \\ -P_i(1, t) + 3P_i(1, t)^2 - 2P_i(1, t)^3 &= 0, \text{ où } \sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} A_{ij} A_{il} \neq 0, \\ P_i(1, t) &= 0, 1 \text{ ou } 0.5. \end{aligned}$$

En absence de robots têtus, si tous les robots ont la même probabilité d'opinion 1 initiale, nous pouvons déjà dire que ce système contient trois équilibres. Les équilibres en 0 et 1 sont probablement stables et l'équilibre en 0.5 est probablement instable.

5.2.1 Modélisation via le graphe All-to-All

Le *Majority model* appliqué sur le graphe All-to-All, A_{ij} est égal à 1 pour tout i et tout j distincts et donc $\sum_{j \neq i} A_{ij}$ est égal à $N - 1$. La master equation peut, dans ce cas-ci, se réécrire pour tout i appartenant à I ,

$$\frac{\delta P_i(1,t)}{\delta t} = \frac{\lambda}{2(N-1)(N-2)} [\sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i,j} (-P_i(1,t) + P_j(1,t)P_l(1,t) + P_l(1,t)P_i(1,t) - 2P_j(1,t)P_l(1,t)P_i(1,t)) + P_j(1,t)P_l(1,t)].$$

Cette équation est une équation non linéaire dont le calcul des racines est laborieux. Nous avons effectué plusieurs simulations de l'évolution de cette probabilité en faisant varier les valeurs de $S1$, de $S0$ et de la probabilité initiale d'opinion 1, commune aux robots non-têtus. Dans la figure 5.2, nous pouvons observer cette évolution. Les trois équilibres semblent à chaque fois distincts. Sur le graphique en haut à gauche, il y a clairement deux équilibres stables en 1 et en 0 et nous pouvons deviner un équilibre instable entre 0.4 et 0.5. Sur le graphique en haut à droite, le constat est similaire, à ceci près que l'équilibre stable n'est pas en 0 mais en environ 0.0183. Il se pourrait que ce soit la valeur de $S1$ qui empêche un équilibre d'apparaître en 0. Sur le graphique du bas, les valeurs de $S1$ et $S0$ ont toutes les deux augmenté et le déplacement des deux équilibres stables semble être la conséquence de cette augmentation. Le *Majority model*, selon le graphe All-to-All, semble favoriser le consensus vers une opinion donnée en fonction de l'état initial du système à condition que le nombre de robots têtus d'opinion opposée ne soit pas trop élevé. Ces résultats, mis en parallèle avec ceux de l'approche macroscopique, sont cohérents car l'existence des équilibres stables proches de 0 et 1 explique la position des quantiles à 5 pourcents et 95 pourcents des graphiques de l'approche macroscopique.

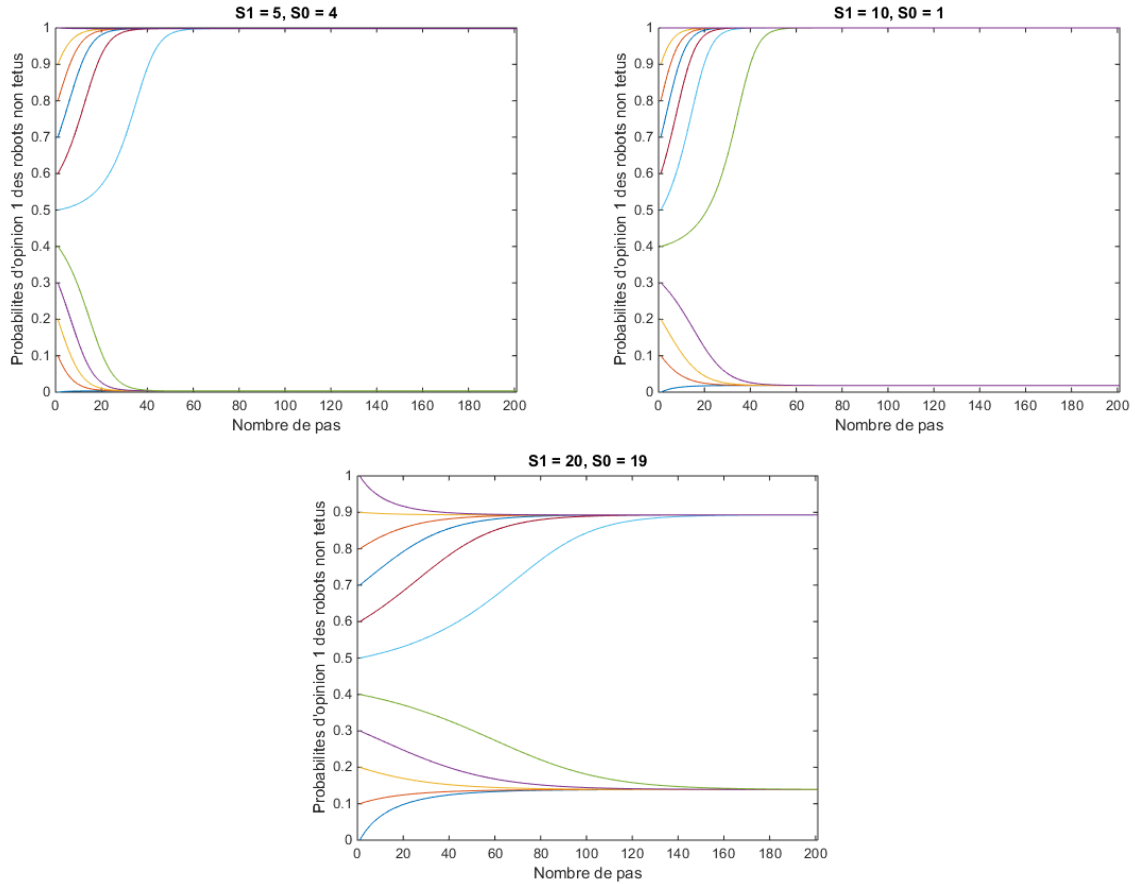


FIGURE 5.2 – Evolution de la probabilité d'un robot non-têtu d'avoir l'opinion 1 au cours du temps en fonction de la valeur de $S0$ et $S1$, dans le *Majority model*, selon le graphe All-to-All.

5.2.2 Modélisation via le graphe statique

Le *Majority model* appliqué sur le graphe statique, l'équilibre est différent pour chaque robot non-têtu. Revenons donc à la master equation sous sa forme plus générale. Pour tout i appartenant à I ,

$$\frac{\delta P_i(1,t)}{\delta t} = \frac{\lambda}{2 \sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i,j} A_{ij} A_{il}} [\sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i,j} (-P_i(1,t) + P_j(1,t)P_i(1,t) + P_l(1,t)P_i(1,t) - 2P_j(1,t)P_l(1,t)P_i(1,t)) + P_j(1,t)P_l(1,t)A_{ij}A_{il}].$$

Dans un graphe statique, la position des robots têtus a énormément d'influence sur l'équilibre global du système. Mais pour le *Majority model*, la probabilité d'opinion 1 initiale des robots non-têtus a également énormément d'influence sur cet équilibre. Nous pouvons nous en rendre compte en illustrant l'état final du système pour une configuration de robots têtus fixée et selon trois probabilités d'opinion 1 initiales différentes : 0, 0.5 et 1. Les valeurs de $S1$ et $S0$ sont égales à respectivement 5 et 4. Dans la figure 5.3, chaque robot est représenté par un carré gris. Sa nuance de gris correspond à sa probabilité d'avoir l'opinion 1 à la fin du processus. Ces équilibres finaux sont extrêmement dépendants de la probabilité d'avoir l'opinion 1 initiale des robots non-têtus. Les positions des robots têtus d'opinion 1 sont les carrés blancs de la représentation en haut à gauche et les positions des robots têtus d'opinion 0 sont les carrés noirs de la représentation du bas. Dans la figure 5.3, nous pouvons voir que le consensus est atteint parmi les non-têtus quand ils démarrent avec une probabilité d'opinion 1 extrême mais que des zones de consensus différentes apparaissent en étant délimitées par les robots têtus quand ils démarrent avec une probabilité d'opinion 1 moyenne.

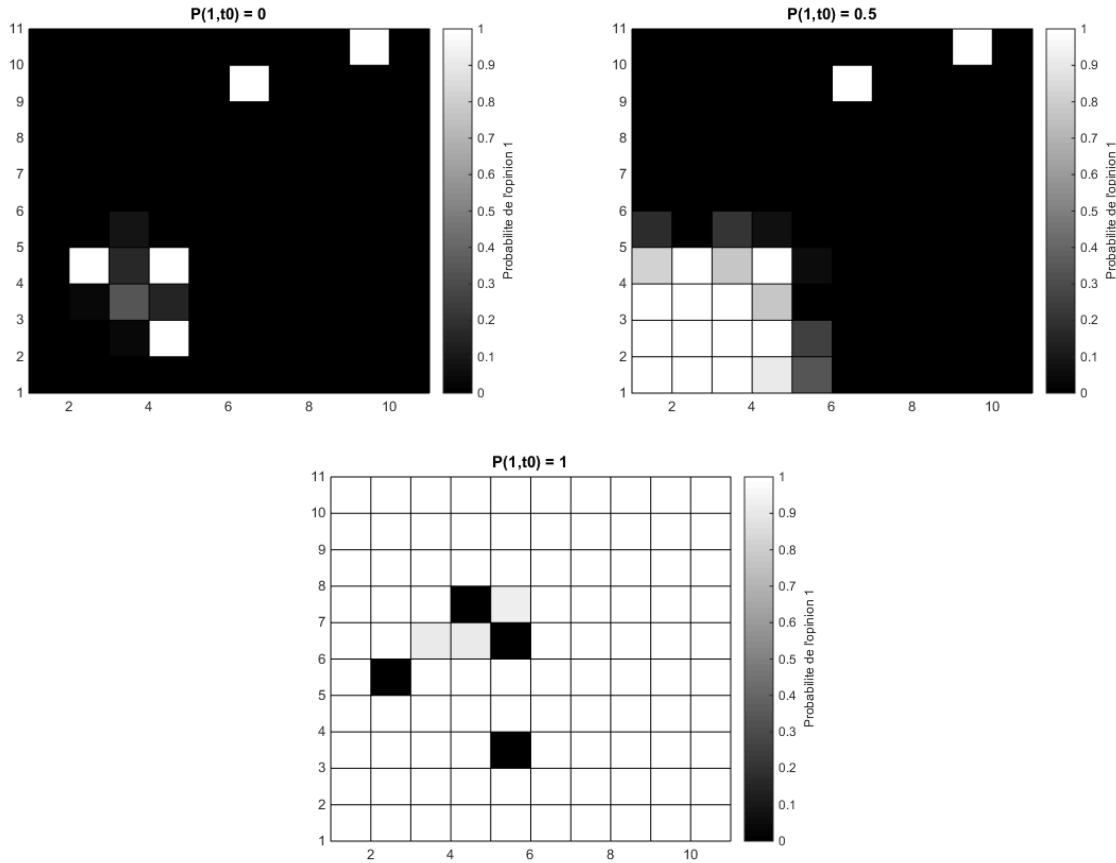


FIGURE 5.3 – Probabilité de chaque robot d'avoir l'opinion 1 à la fin du processus pour trois probabilités d'opinion 1 initiales des robots non-têtus, dans le *Majority model*, selon le graphe statique.

Nous pourrions prolonger l'analyse du *Majority model* mais notre objectif principal est l'analyse du *Probabilistic model*. Nous nous arrêtons donc ici et nous n'appliquons pas le *Majority model* sur le graphe dynamique. Néanmoins, nous pouvons conclure que les trois modèles présentés ici semblent, au moins qualitativement, décrire correctement la dynamique des opinions des robots non-têtus suivant les règles du *Majority model*. Emettons tout de même une réserve par rapport aux résultats de l'approche macroscopique qui n'a pas semblé produire des résultats totalement satisfaisants.

Chapitre 6

Modélisation du *Probabilistic model*

Dans le cas du *Probabilistic model*, un robot non-têtu qui observe un robot d'opinion différente change d'opinion avec une certaine probabilité. Cette probabilité évolue en fonction du fait que le robot observé ait ou non une opinion différente de celle du robot observateur. Nous allons procéder à l'analyse de ce modèle en travaillant successivement avec les deux manières d'appréhender le *Probabilistic model* : en postulant l'indépendance entre l'opinion et la probabilité de changer d'opinion puis en prenant en compte la dépendance entre l'opinion et la probabilité de changer d'opinion. Avec la première manière, nous appliquerons le *Probabilistic model* sur le graphe All-to-All et nous verrons qu'il est quasiment équivalent au *Voter model*. En revanche, avec la seconde manière, nous appliquerons le *Probabilistic model* sur les trois graphes différents car les résultats seront sensiblement différents de ceux du *Voter model*. Nous étudierons également les bifurcations qui surviennent lors de l'évolution des valeurs des différents paramètres du système. Enfin, nous comparerons tous ces résultats aux simulations initiales réalisées dans la section 2.2.

6.1 Modélisation postulant l'indépendance : opinion/probabilité de changer d'opinion

En considérant une indépendance entre l'opinion d'un robot et sa probabilité de changer d'opinion, les master equations 3.3 qui décrivent notre système sont les suivantes. Pour tout i appartenant à I ,

$$\frac{\delta P'_i(1, t|1, t_0)}{\delta t} = -W'_i(k|1, t)P'_i(1, t|1, t_0) + \sum_{l=1}^4 W'_i(1|k^l, t)P'_i(k^l, t|1, t_0),$$

pour tout m naturel compris entre 1 et 3 inclus,

$$\begin{aligned} \frac{\delta P'_i(k^m, t|1, t_0)}{\delta t} = & -W'_i(k^{m+1}|k^m, t)P'_i(k^m, t|1, t_0) - W'_i(k^0|k^m, t)P'_i(k^m, t|1, t_0) \\ & + W'_i(k^m|k^{m-1}, t)P'_i(k^{m-1}, t|1, t_0) + W'_i(k^m|k^{m+4}, t)P'_i(k^{m+4}, t|1, t_0), \end{aligned}$$

et pour tout m naturel strictement supérieur à 3,

$$\begin{aligned} \frac{\delta P'_i(k^m, t|1, t_0)}{\delta t} = & -W'_i(k^{m+1}|k^m, t)P'_i(k^m, t|1, t_0) - W'_i(k^{m-4}|k^m, t)P'_i(k^m, t|1, t_0) \\ & + W'_i(k^m|k^{m-1}, t)P'_i(k^{m-1}, t|1, t_0) + W'_i(k^m|k^{m+4}, t)P'_i(k^{m+4}, t|1, t_0). \end{aligned}$$

Nous devons donc décrire la valeur de $W_i(0|1, t)$, $W_i(1|0, t)$ et $W'_i(k^l|k^m, t)$ pour les valeurs de m et l qui nous intéressent.

$$W_i(0|1, t) = \begin{cases} \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=0}^n k^s P'_i(k^s, t)}{n} \frac{a_i P(0, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}}, & \text{si } \sum_{j \neq i} A_{ij} \neq 0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$W_i(1|0, t) = \begin{cases} \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=0}^n k^s P'_i(k^s, t)}{n} \frac{a_i P(1, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}}, & \text{si } \sum_{j \neq i} A_{ij} \neq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La master equation 3.2 décrivant la probabilité de l'opinion 1 pour le robot i devient donc

$$\begin{aligned} \frac{\delta P_i(1, t)}{\delta t} &= -\frac{\lambda}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} a_i P(0, t) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=0}^n k^s P'_i(k^s, t)}{n} P_i(1, t) \\ &\quad + \frac{\lambda}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} a_i P(1, t) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=0}^n k^s P'_i(k^s, t)}{n} P_i(0, t) \\ &= \frac{\lambda}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=0}^n k^s P'_i(k^s, t)}{n} [-a_i (I_v - P(1, t)) P_i(1, t) + a_i P(1, t) (1 - P_i(1, t))] \\ &= \frac{\lambda}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=0}^n k^s P'_i(k^s, t)}{n} [-a_i I_v P_i(1, t) + a_i P(1, t) P_i(1, t) \\ &\quad + a_i P(1, t) - a_i P(1, t) P_i(1, t)] \\ &= \frac{\lambda}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=0}^n k^s P'_i(k^s, t)}{n} [-\sum_{j \neq i} A_{ij} P_i(1, t) + a_i P(1, t)] \end{aligned}$$

$$\frac{\delta P_i(1, t)}{\delta t} = -\lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=0}^n k^s P'_i(k^s, t)}{n} P_i(1, t) + \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=0}^n k^s P'_i(k^s, t)}{n} \frac{a_i P(1, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}}. \quad (6.1)$$

La dynamique de cette master equation est finalement identique à celle de la master equation du *Voter model*, à un facteur multiplicatif près, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=0}^n k^s P'_i(k^s, t)}{n}$. Ce facteur ne devrait à priori pas influencer les équilibres du système du *Voter model* au *Probabilistic model* mais juste sa vitesse de convergence vers ces équilibres.

Décrivons maintenant la valeur de $W'_i(k^l | k^m, t)$ des équations 3.3 pour les valeurs de m et l qui nous intéressent. Pour tout m naturel strictement supérieur à 3,

$$\begin{aligned} W'_i(k^{m-4} | k^m, t) &= W'_i(k^0 | k^1, t) = W'_i(k^0 | k^2, t) = W'_i(k^0 | k^3, t) \\ &= \lambda \left(\frac{a_i P(1, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} P_i(0, t) + \frac{a_i P(0, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} P_i(1, t) \right) \\ &= \frac{\lambda}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} (a_i P(1, t) (1 - P_i(1, t)) + a_i (I_v - P(1, t)) P_i(1, t)) \\ &= \frac{\lambda}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} (a_i P(1, t) - a_i P(1, t) P_i(1, t) + a_i I_v P_i(1, t) - a_i P(1, t) P_i(1, t)) \\ &= \frac{\lambda}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} (a_i P(1, t) - 2a_i P(1, t) P_i(1, t) + \sum_{j \neq i} A_{ij} P_i(1, t)) \\ &= \frac{\lambda}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} a_i P(1, t) (1 - 2P_i(1, t)) + \lambda P_i(1, t). \end{aligned}$$

Pour tout m naturel,

$$\begin{aligned} W'_i(k^{m+1} | k^m, t) &= \lambda \left(\frac{a_i P(1, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} P_i(1, t) + \frac{a_i P(0, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} P_i(0, t) \right) \\ &= \frac{\lambda}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} (a_i P(1, t) P_i(1, t) + a_i (I_v - P(1, t)) (1 - P_i(1, t))) \\ &= \frac{\lambda}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} (a_i P(1, t) P_i(1, t) + a_i I_v - a_i P(1, t) - a_i I_v P_i(1, t) + a_i P(1, t) P_i(1, t)) \\ &= \frac{\lambda}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} (2a_i P(1, t) P_i(1, t) + \sum_{j \neq i} A_{ij} - a_i P(1, t) - \sum_{j \neq i} A_{ij} P_i(1, t)) \\ &= \frac{\lambda}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} a_i P(1, t) (2P_i(1, t) - 1) + \lambda - \lambda P_i(1, t). \end{aligned}$$

6.1.1 Modélisation via le graphe All-to-All

Le *Probabilistic model* appliqué sur le graphe All-to-All, $\sum_{j \neq i} A_{ij}$ est égal à $N - 1$. De plus, tous les robots non-têtus ont leur opinion décrite par la même master equation car ils sont adjacents aux mêmes robots. De plus, comme chaque robot non-têtu est initialisé avec la même probabilité d'avoir l'opinion 1, alors pour tout i et tout j appartenant à I et pour tout t supérieur à t_0 , l'instant de l'état initial,

$$P_i(1, t) = P_j(1, t).$$

La master equation 6.1 décrivant l'évolution de la probabilité d'avoir l'opinion 1 peut, dans ce cas-ci, se réécrire pour tout i appartenant à I ,

$$\begin{aligned}\frac{\delta P_i(1,t)}{\delta t} &= -\lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=0}^n k^s P'_i(k^s, t)}{n} P_i(1, t) + \frac{\lambda}{N-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=0}^n k^s P'_i(k^s, t)}{n} a_i P(1, t) \\ &= -\lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=0}^n k^s P'_i(k^s, t)}{n} P_i(1, t) + \frac{\lambda}{N-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=0}^n k^s P'_i(k^s, t)}{n} ((N-1-S1-S0)P_i(1, t) + S1) \\ &= \frac{\lambda}{N-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=0}^n k^s P'_i(k^s, t)}{n} ((-S1-S0)P_i(1, t) + S1).\end{aligned}$$

Annulons le membre de droite de cette équation pour trouver l'équilibre de ce système en fonction de N , $S1$ et $S0$.

$$\frac{\lambda}{N-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=0}^n k^s P'_i(k^s, t)}{n} ((-S1-S0)P_i(1, t) + S1) = 0$$

$P_i(1, t) = \frac{S1}{S1+S0}$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=0}^n k^s P'_i(k^s, t)}{n} = 0$. Or, la probabilité de changer d'opinion n'égale jamais 0 pour un robot non-têtu. Dans un système de N robots dont $S1$ têtus d'opinion 1 et $S0$ têtus d'opinion 0 et dont l'évolution des opinions est régie par le *Probabilistic model*, selon le graphe All-to-All et en postulant l'indépendance entre l'opinion et la probabilité de changer d'opinion, les robots non-têtus tendent à avoir une probabilité d'opinion 1 égale au rapport entre le nombre de robots têtus d'opinion 1 et le nombre de robots têtus total. Cet équilibre est effectivement exactement le même que pour le *Voter model*. Pour une comparaison plus poussée, nous avons simulé plusieurs fois l'évolution de la probabilité qu'un robot non-têtu ait l'opinion 1 au cours du temps. Nous avons varié les valeurs de $S1$ et $S0$ et la probabilité d'avoir l'opinion 1 initiale des robots non-têtus. Dans la figure 6.1, nous pouvons observer ces évolutions. Nous pouvons effectivement y constater une vitesse de convergence plus faible que pour le *Voter model*.

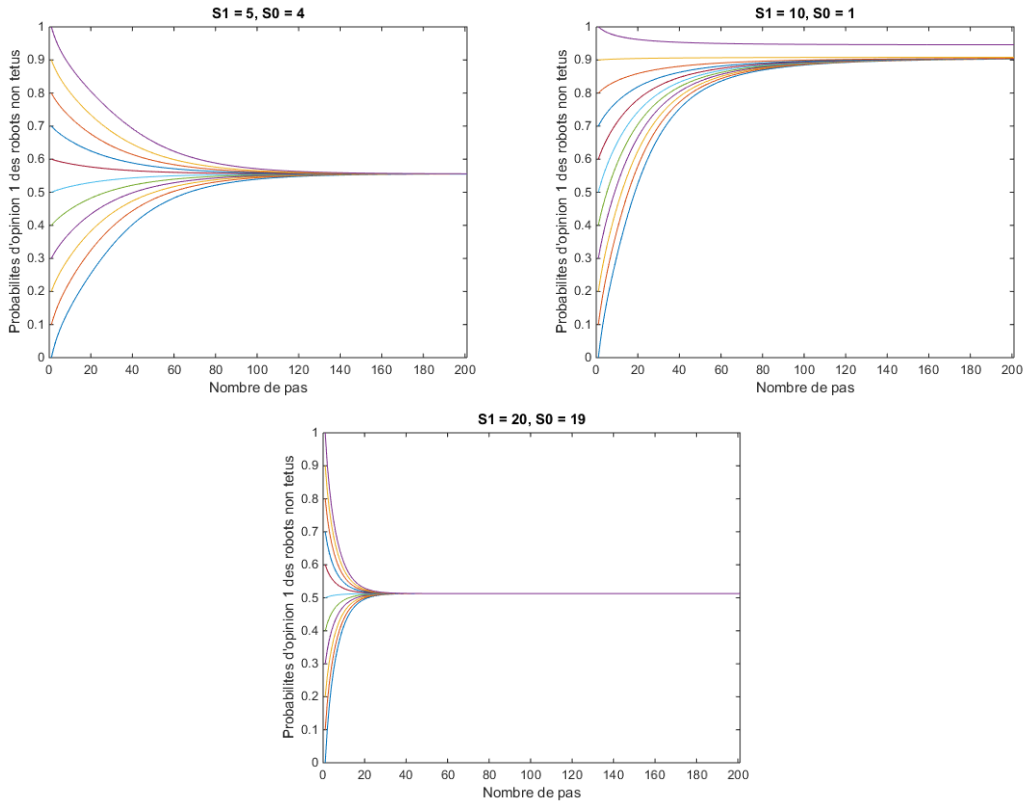


FIGURE 6.1 – Evolution de la probabilité d'un robot non-têtu d'avoir l'opinion 1 au cours du temps en fonction de la valeur de $S0$ et $S1$, dans le *Probabilistic model*, en postulant l'indépendance entre l'opinion et la probabilité de changer d'opinion, selon le graphe All-to-All.

Cette manière de modéliser le *Probabilistic model* le rend trop similaire au *Voter model* et il donne effectivement quasiment les mêmes résultats finaux que celui-ci une fois appliqué au graphe statique et au graphe dynamique. C'est pourquoi nous ne développerons pas ces résultats ici. De plus, ces résultats ne correspondent absolument pas aux simulations de la section 2.2 car ils ne concluent jamais à l'existence de trois équilibres dont un instable. Or, c'est ce que nous observions pour des valeurs de $S1$ et $S0$ égales respectivement à 5 et 4. L'abstraction postulant l'indépendance entre l'opinion d'un robot et sa probabilité de changer d'opinion est donc trop forte et aboutit à des résultats irréalistes.

6.2 Modélisation postulant la dépendance : opinion/probabilité de changer d'opinion

En considérant une dépendance entre l'opinion d'un robot et sa probabilité de changer d'opinion, la master equation 3.4 qui décrit notre système est la suivante. Pour tout i appartenant à I et pour tout m naturel,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \hat{P}_i(1, k^m, t)}{\delta t} = & - \sum_{l \neq j} \hat{W}_i(1, k^l | 1, k^m, t) \hat{P}_i(1, k^m, t) + \sum_{l \neq j} \hat{W}_i(1, k^m | 1, k^l, t) \hat{P}_i(1, k^l, t) \\ & - \sum_{l=0}^{\infty} \hat{W}_i(0, k^l | 1, k^m, t) \hat{P}_i(1, k^m, t) + \sum_{l=0}^{\infty} \hat{W}_i(1, k^m | 0, k^l, t) \hat{P}_i(0, k^l, t). \end{aligned}$$

Nous devons donc décrire la valeur de $\hat{W}_i(x, k^l | y, k^m, t)$ pour tout m et pour tout l naturels, pour tout x et pour tout y valant 1 ou 0, tels que x est égal à y si et seulement si m est distinct de l . Pour tout x et tout y distincts valant 1 ou 0,

$$\begin{aligned} \hat{W}_i(x, k^l | x, k^m, t) &= \begin{cases} \lambda \frac{a_i P(y, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} (1 - k^m), & \text{si } m \in [1, 3], l = 0 \text{ ou } m > 3, l = m - 4 \\ \lambda \frac{a_i P(x, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}}, & \text{si } l = m + 1 \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \\ \hat{W}_i(y, k^l | x, k^m, t) &= \begin{cases} \lambda \frac{a_i P(y, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} k^m, & \text{si } m \in [0, 3], l = 0 \text{ ou } m > 3, l = m - 4 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nous pouvons constater que, pour la plupart des valeurs de m (m naturel strictement supérieur à 3) et pour tout x et tout y distincts valant 1 ou 0,

$$\begin{aligned} & - \sum_{l \neq j} \hat{W}_i(x, k^l | x, k^m, t) \hat{P}_i(x, k^m, t) - \sum_{l=0}^{\infty} \hat{W}_i(y, k^l | x, k^m, t) \hat{P}_i(x, k^m, t) \\ = & (-\hat{W}_i(x, k^{m+1} | x, k^m, t) - \hat{W}_i(x, k^{m-4} | x, k^m, t) - \hat{W}_i(y, k^{m-4} | x, k^m, t)) \hat{P}_i(x, k^m, t) \\ = & (-\lambda \frac{a_i P(x, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} - \lambda \frac{a_i P(y, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} (1 - k^m) - \lambda \frac{a_i P(y, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} k^m) \hat{P}_i(x, k^m, t) \\ = & -\lambda \hat{P}_i(x, k^m, t). \end{aligned}$$

En effet, pour ces valeurs de m , la probabilité qu'une probabilité de changer d'opinion évolue est égale à la probabilité d'observer un autre robot, λ . Pour ces mêmes valeurs de m , nous pouvons ainsi écrire que

$$\begin{aligned} \frac{\delta \hat{P}_i(x, k^m, t)}{\delta t} &= -\lambda \hat{P}_i(x, k^m, t) \\ &+ \hat{W}_i(x, k^m | x, k^{m-1}, t) \hat{P}_i(x, k^{m-1}, t) \\ &+ \hat{W}_i(x, k^m | x, k^{m+4}, t) \hat{P}_i(x, k^{m+4}, t) \\ &+ \hat{W}_i(x, k^m | y, k^{m+4}, t) \hat{P}_i(y, k^{m+4}, t) \\ = & -\lambda \hat{P}_i(x, k^m, t) \\ &+ \lambda \frac{a_i P(x, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} \hat{P}_i(x, k^{m-1}, t) \\ &+ \lambda \frac{a_i P(y, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} (1 - k^{m+4}) \hat{P}_i(x, k^{m+4}, t) \\ &+ \lambda \frac{a_i P(x, t)}{\sum_{j \neq i} A_{ij}} k^{m+4} \hat{P}_i(y, k^{m+4}, t). \end{aligned}$$

6.2.1 Modélisation via le graphe All-to-All

Le *Probabilistic model* appliqué sur le graphe All-to-All, $\sum_{j \neq i} A_{ij}$ est égal à $N - 1$. De plus, tous les robots non-têtus ont leur opinion décrite par la même master equation car ils sont adjacents aux mêmes robots. Enfin, comme chaque robot non-têtu est initialisé avec la même probabilité d'avoir l'opinion 1, alors pour tout i et tout j appartenant à I , pour tout m naturel, pour tout x valant 1 ou 0 et pour tout t supérieur à t_0 , l'instant de l'état initial,

$$\hat{P}_i(x, k^m, t) = \hat{P}_j(x, k^m, t).$$

La master equation peut, dans ce cas-ci, se réécrire pour tout i appartenant à I ,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \hat{P}_i(1, k^m, t)}{\delta t} &= -\lambda P'_i(1, k^m, t) \\ &\quad + \frac{\lambda}{N-1} a_i P(1, t) \hat{P}_i(1, k^{m-1}, t) \\ &\quad + \frac{\lambda}{N-1} a_i P(0, t) (1 - k^{m+4}) \hat{P}_i(1, k^{m+4}, t) \\ &\quad + \frac{\lambda}{N-1} a_i P(1, t) k^{m+4} \hat{P}_i(0, k^{m+4}, t) \\ &= -\lambda P'_i(1, k^m, t) \\ &\quad + \frac{\lambda}{N-1} ((N-1-S1-S0)P_i(1, t) + S1) \hat{P}_i(1, k^{m-1}, t) \\ &\quad + \frac{\lambda}{N-1} (1 - (N-1-S1-S0)P_i(1, t) - S1)(1 - k^{m+4}) \hat{P}_i(1, k^{m+4}, t) \\ &\quad + \frac{\lambda}{N-1} ((N-1-S1-S0)P_i(1, t) + S1) k^{m+4} \hat{P}_i(0, k^{m+4}, t). \end{aligned}$$

Cependant, $P_i(x, t)$ est égal à $\sum_{s=0}^{\infty} \hat{P}_i(x, k^s, t)$. Cette master equation est donc relativement compliquée et il semble bien trop laborieux de calculer les équilibres de ce système analytiquement. Nous avons effectué plusieurs simulations de l'évolution de la probabilité de chacun des états possibles en faisant varier les valeurs de $S1$, de $S0$ et de la probabilité initiale d'opinion 1, commune aux robots non-têtus. Dans la figure 6.2, nous pouvons observer cette évolution. Sur le graphique en haut à gauche, nous observons clairement la présence de deux équilibres stables en 1 et 0. Nous y devinons également un équilibre instable entre 0.4 et 0.5. Sur le graphique en haut à droite, l'équilibre en 0 a apparemment disparu. Nous pouvons néanmoins suspecter la présence d'un équilibre instable proche de 0 car la courbe de l'évolution de la probabilité d'opinion 1 ayant démarré à 0 prend beaucoup plus de temps que les autres pour atteindre l'équilibre. La disparition de l'équilibre stable en 0 est probablement une conséquence de l'écart entre $S1$ et $S0$. Sur le graphique du bas, nous constatons un changement total de dynamique. Il ne semble plus y avoir qu'un seul équilibre stable mais qui n'est ni en 1 ni en 0. Or, pour les paramétrisations de $S1$ et $S0$ précédentes, un consensus était systématiquement atteint, ce n'est plus le cas. Ces trois graphiques correspondent exactement à ceux de la section 2.2. En effet, nous y devinons deux équilibres stables en 1 et 0 quand il y avait peu de robots têtus, un des équilibres disparaissait quand l'écart entre $S1$ et $S0$ augmentait et ce dernier équilibre stable se rapprochait de 0.5 quand les robots têtus étaient nombreux et équitablement répartis dans les deux opinions. Ce changement de dynamique est le signe d'une bifurcation lors de l'évolution de la valeur des paramètres $S1$ et $S0$.

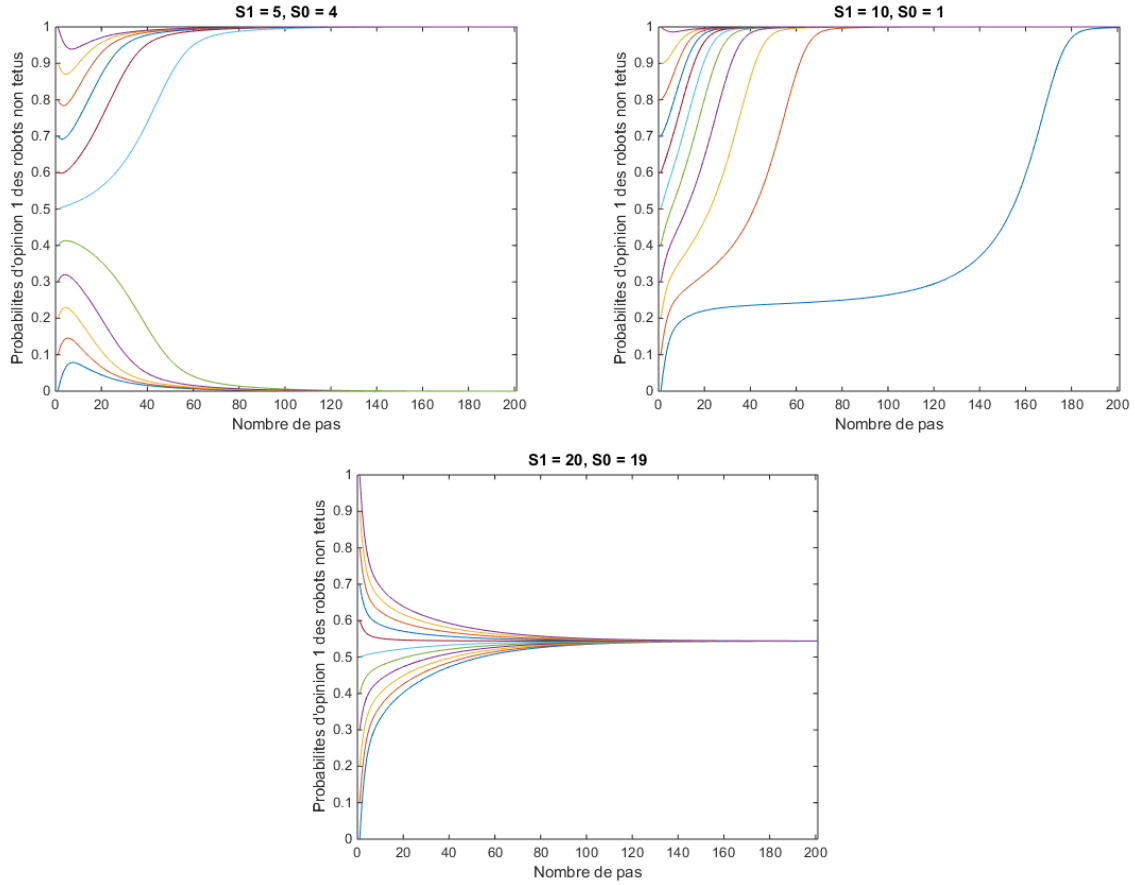


FIGURE 6.2 – Evolution de la probabilité d'un robot non-tête d'avoir l'opinion 1 au cours du temps en fonction de la valeur de $S0$ et $S1$, dans le *Probabilistic model*, en postulant une dépendance entre l'opinion et la probabilité de changer d'opinion, selon le graphe All-to-All.

6.2.2 Analyse des bifurcations du modèle All-to-All

Pour mettre en évidence la bifurcation mentionnée à la section précédente, nous avons réitéré les simulations en augmentant considérablement le nombre de valeurs différentes pour $S1$, $S0$ et N . Nous avons conservé, pour chaque paramétrisation et chaque probabilité d'opinion 1 initiale, uniquement la probabilité d'opinion 1 finale. En observant cette probabilité finale en fonction de la probabilité initiale, nous avons pu mettre en évidence la position de l'équilibre instable avec une précision de 0.01 pour la figure 6.3 et une précision de 0.05 pour la figure 6.4. Sur le graphique en haut à gauche de la figure 6.3, nous retrouvons la dynamique avec deux équilibres stables en 1 et 0 ainsi qu'un équilibre instable dont la position dépend du rapport entre les valeurs de $S1$ et $S0$. Sur le graphique en haut à droite de cette même figure, nous pouvons voir la bifurcation en point de selle apparaître pour une valeur de $S0$ passant de 1 à 2. Toujours dans la même figure, sur le graphique du bas, nous pouvons observer le déplacement du dernier équilibre restant en fonction de la valeur de $S0$. Ce résultat correspond à ce que nous avons observé pour des valeurs de $S1$ et $S0$ respectivement égales à 20 et 19.

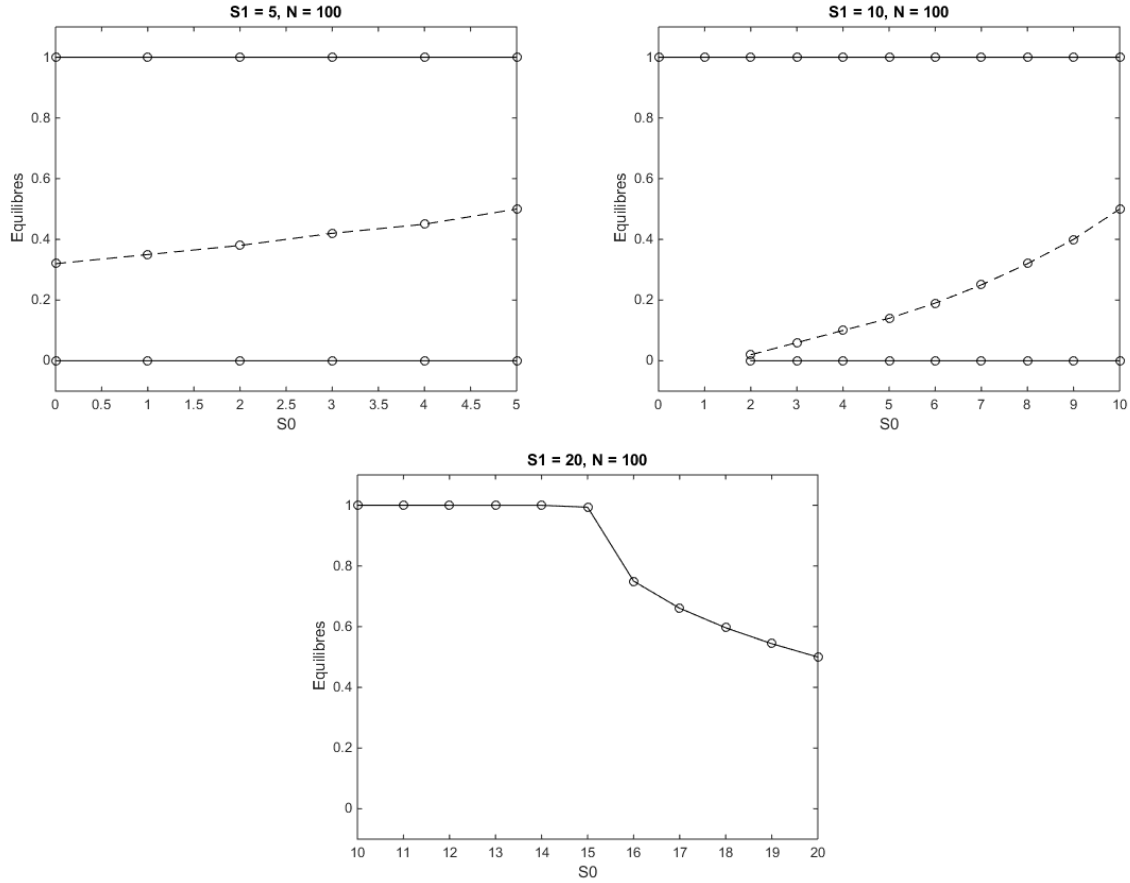


FIGURE 6.3 – Evolution des équilibres du système en fonction de la valeur de S_0 quand S_1 vaut 5, 10 et 20 et que N vaut 100, dans le *Probabilistic model*, en postulant une dépendance entre l'opinion et la probabilité de changer d'opinion, selon le graphe All-to-All.

Dans la figure 6.4, c'est désormais le nombre total de robots qui varie tandis que S_1 et S_0 sont fixés à respectivement 5 et 4. Cette figure permet de mettre en évidence l'importance de la proportion de robots têtus dans l'ensemble de robots. En effet, à gauche du graphique, quand le nombre de robots non-têtus est relativement faible, le consensus ne peut pas être atteint car ils sont influencés par trop de robots qu'ils ne peuvent pas influencer. Quand le nombre de robots total vaut entre 30 et 40, les robots non-têtus sont suffisamment nombreux pour s'influencer les uns les autres et se maintenir dans le consensus correspondant à l'opinion majoritaire parmi les robots têtus. Quand le nombre de robots total devient relativement beaucoup plus grand que le nombre de robots têtus, les robots non-têtus deviennent suffisamment nombreux pour même se maintenir dans un consensus opposé à l'opinion majoritaire parmi les robots têtus.

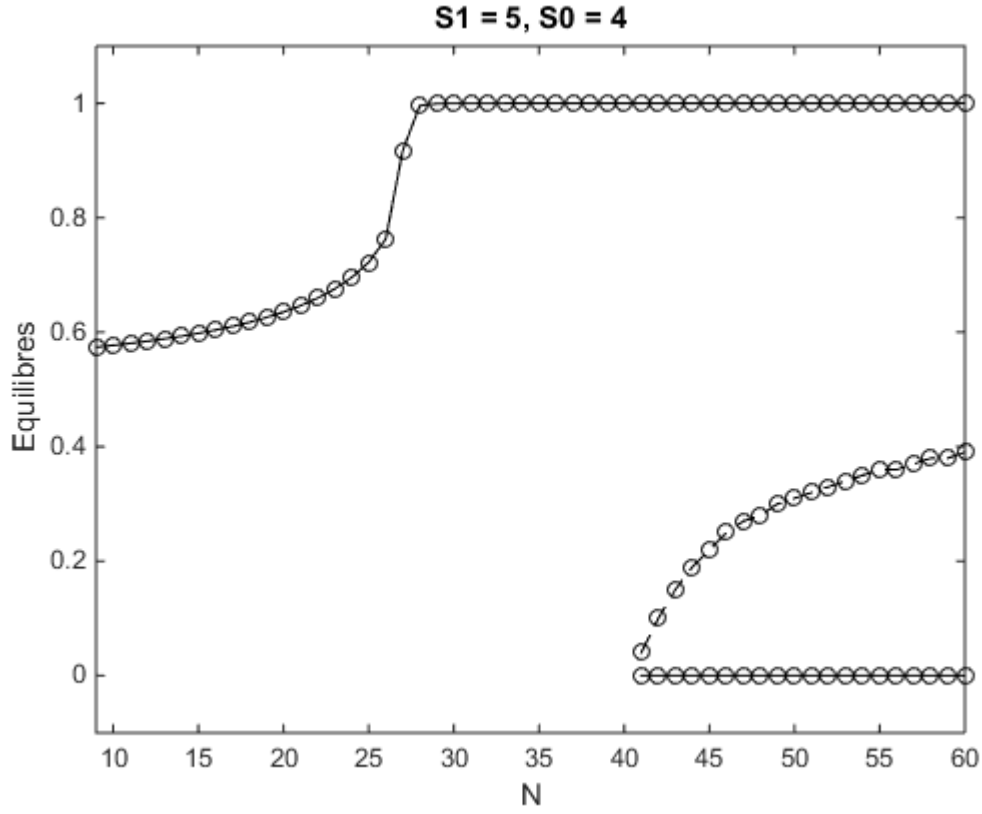


FIGURE 6.4 – Evolution des équilibres du système en fonction de la valeur de N quand $S1$ et $S0$ valent respectivement 5 et 4, dans le *Probabilistic model*, en postulant une dépendance entre l'opinion et la probabilité de changer d'opinion, selon le graphe All-to-All.

Dans la figure 6.5, nous pouvons découvrir en couleurs les différentes zones correspondant aux différents types d'équilibres que nous venons d'évoquer. En haut à gauche et en bas à droite se trouvent les zones qui correspondent à un consensus unique, respectivement 0 et 1. En bas à gauche, il s'agit de la zone dans laquelle il y a deux équilibres stables en 0 et 1 et un équilibre instable dont la valeur varie. Dans la dernière zone, en haut à droite, il n'y a qu'un seul équilibre, stable, mais dont la valeur varie également. Il est intéressant de remarquer une jointure entre ces quatre zones en un point précis. En effet, quand $S1$ et $S0$ valent 14, il n'y a qu'un seul équilibre. Cet équilibre est stable et se trouve évidemment en 0.5. Si on ajoute ou retire un seul robot têtu, on passe directement à un équilibre stable en 0 ou en 1. Si on retire un robot têtu de chaque opinion, l'équilibre en 0.5 devient instable et les équilibres stables en 0 et 1 apparaissent tous les deux. Pour un ensemble de 100 robots, il est donc impossible de trouver une paramétrisation pour laquelle nous ayons à la fois un équilibre instable et un équilibre stable distinct de 0 et 1. Nous avons réalisé plusieurs autres simulations en passant le nombre total de robots, N , à 1000 et les résultats sont les suivants. Pour une valeur de $S1$ et $S0$ égale à 140, les trois équilibres sont en 1, 0.5 et 0. Pour une valeur de $S1$ et $S0$ égale à 141, il n'y a qu'un seul équilibre, stable, en 0.5. Il est donc probable qu'il n'existe aucune paramétrisation du système pour laquelle nous ayons à la fois un équilibre instable et un équilibre stable distinct de 0 et 1. Pour finir, dans la figure 6.6, nous pouvons observer que, si les valeurs de $S1$ et $S0$ augmentent simultanément, la bifurcation devient une bifurcation en fourche.

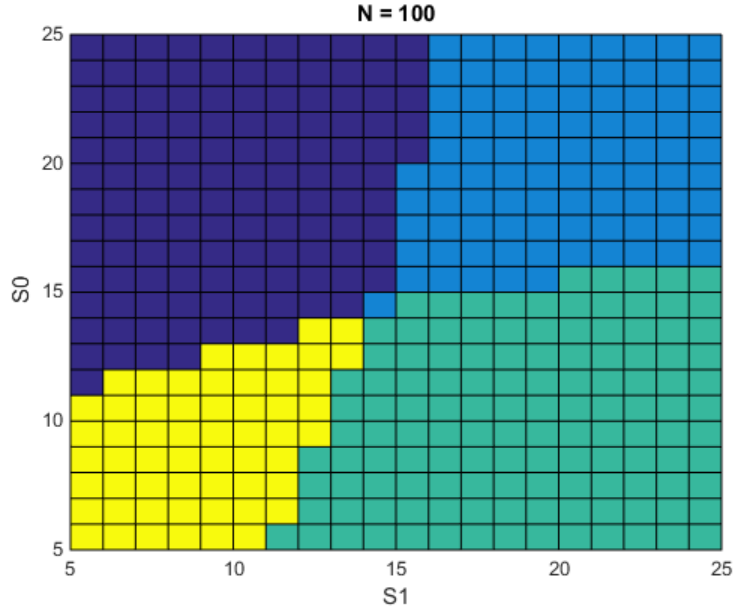


FIGURE 6.5 – Evolution des types d'équilibre en fonction des valeurs de $S1$ et $S0$ quand N vaut 100, dans le *Probabilistic model*, en postulant une dépendance entre l'opinion et la probabilité de changer d'opinion, selon le graphe All-to-All. La zone bleue foncée correspond à l'équilibre unique en 0. La zone verte correspond à l'équilibre unique en 1. La zone bleue claire correspond à l'équilibre unique variant entre 0 et 1 non inclus. La zone jaune correspond à trois équilibres dont un instable variant entre 0 et 1 non inclus.

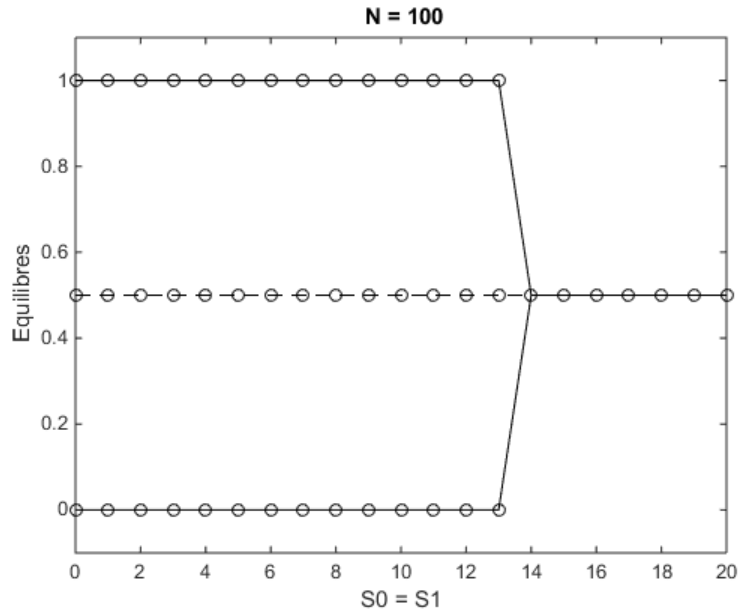


FIGURE 6.6 – Evolution des équilibres du système en fonction des valeurs de $S1$ et $S0$ restant égales, quand N vaut 100, dans le *Probabilistic model*, en postulant une dépendance entre l'opinion et la probabilité de changer d'opinion, selon le graphe All-to-All.

6.2.3 Modélisation via le graphe statique

Le *Probabilistic model* appliqué sur le graphe statique, l'équilibre est différent pour chaque robot non-têtu. Cela rend la master equation encore plus difficile à résoudre. C'est pourquoi nous devons nous contenter une nouvelle fois de simulations. Dans la figure 6.7, les robots têtus d'opinion 1 sont positionnés au niveau des carrés blancs de la représentation en haut à gauche et les robots têtus d'opinion 0 sont positionnés au niveau des carrés noirs de la représentation en bas à droite. Nous pouvons remarquer, dans ces six représentations, une exceptionnelle dépendance de l'équilibre final à la probabilité d'opinion 1 initiale. Mais surtout, cet équilibre final est composé aussi bien de zones de consensus que de robots indécis, mis à part sur la représentation en haut à gauche. Cet équilibre final complexe est également très dépendant de la position des robots têtus, ce qui rend impossible une analyse exhaustive du graphe statique.

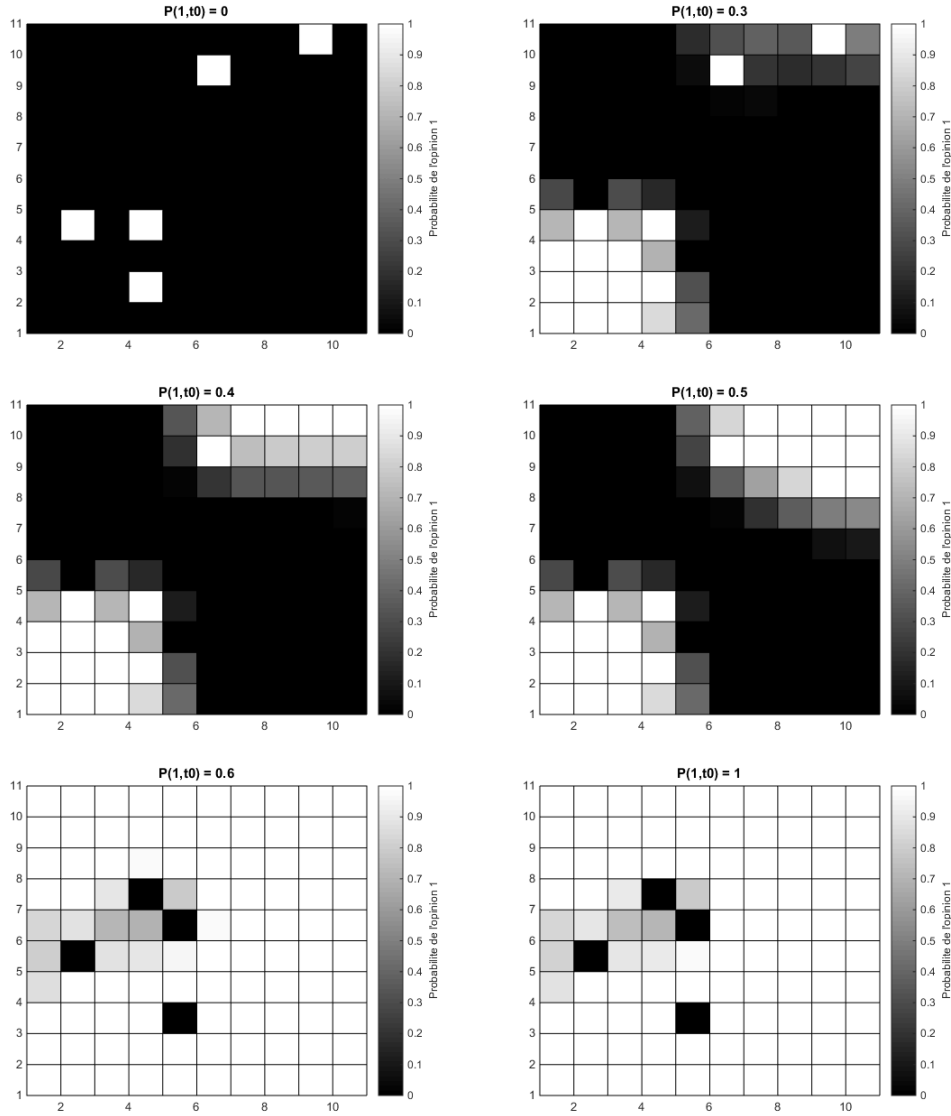


FIGURE 6.7 – Probabilité de chaque robot d'avoir l'opinion 1 à la fin du processus pour six probabilités d'opinion 1 initiales des robots non-têtus, dans le *Probabilistic model*, en postulant une dépendance entre l'opinion et la probabilité de changer d'opinion, selon le graphe statique.

6.2.4 Modélisation via le graphe dynamique

Le *Probabilistic model* appliqué sur le graphe dynamique, la matrice d'adjacence évolue constamment et aléatoirement. Il ne peut donc pas exister d'équilibre fixe car cet équilibre évolue en fonction de cette matrice. Pour ce graphe, nous devons donc de nouveau nous contenter de simulations de l'évolution des probabilités d'opinion 1 de chaque robot. Nous avons effectué 5 simulations pour chacune des 11 probabilités d'opinion 1 initiales pour pouvoir juger de l'influence du caractère aléatoire de la matrice d'adjacence sur l'évolution de ce système. Nous avons également varié les valeurs de $S1$ et $S0$. Dans la figure 6.8, nous pouvons observer les différentes simulations de cette évolution. Le constat est le même que pour le *Voter model* : l'allure de chacun de ces trois graphiques ressemble fortement à celle des graphiques de la figure 6.2, du graphe All-to-All. Cela renforce de nouveau cette intuition selon laquelle le graphe All-to-All est une excellente approximation du graphe dynamique. Notons la présence d'un résultat très intéressant sur le graphique en haut à droite. Parmi les cinq simulations dans lesquelles les robots non-têtus ont démarré avec une probabilité d'opinion 1 égale à 0, une a abouti au consensus en 1 et quatre ont abouti au consensus en 0. Cette différence est entièrement causée par l'évolution aléatoire de la matrice d'adjacence. Cela montre la limitation de l'approximation du graphe dynamique par le graphe All-to-All. Il semble y avoir, proche de 0, un équilibre instable et un équilibre stable très proches l'un de l'autre et cette condition extrême peut rendre la moindre perturbation déterminante.

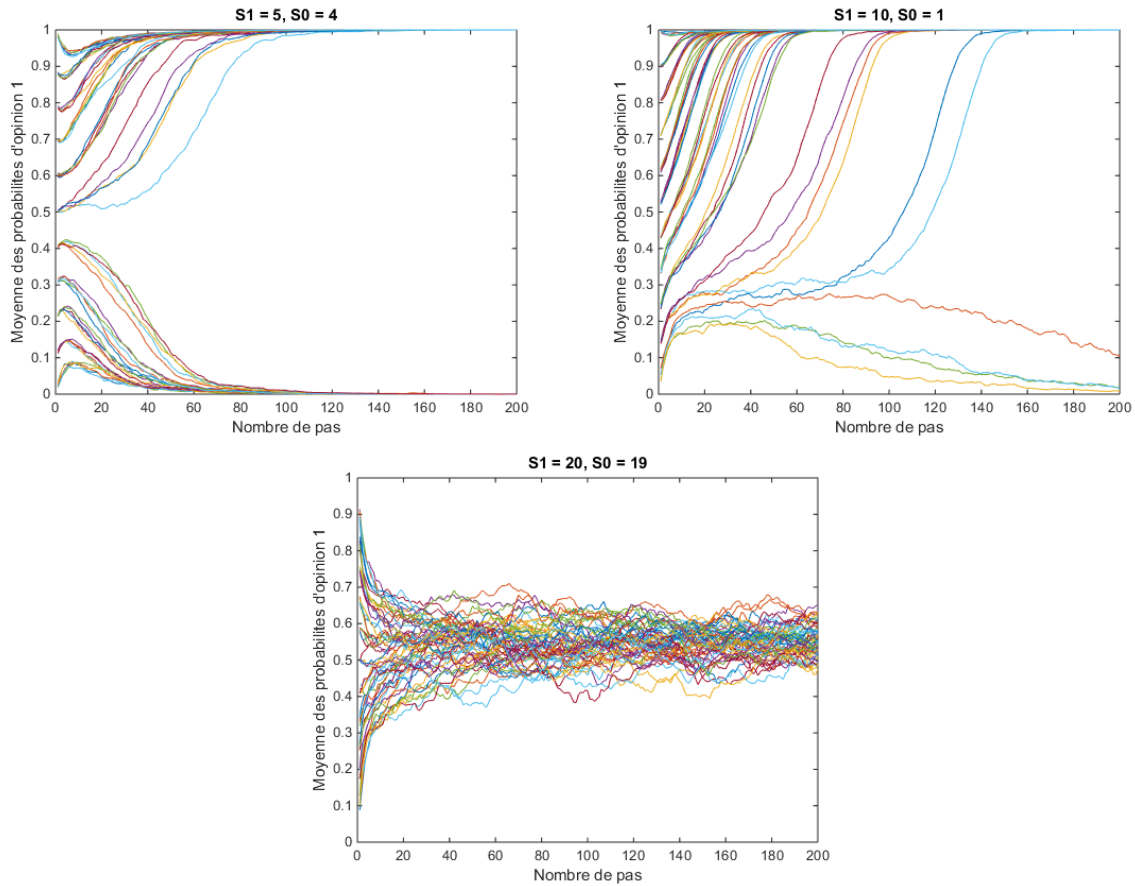


FIGURE 6.8 – Evolution de la moyenne des probabilités des robots non-têtus d'avoir l'opinion 1 au cours du temps en fonction de la valeur de $S0$ et $S1$, dans le *Probabilistic model*, en postulant une dépendance entre l'opinion et la probabilité de changer d'opinion, selon le graphe dynamique.

Comparaison au système initial

Nous voudrions comparer qualitativement les résultats du graphe dynamique avec ceux des simulations du système initial réalisées dans la section 2.2. Pour cela, nous avons effectué 5 simulations du système initial en initialisant 30 pourcents des opinions des non-têtus à 1 et 5 simulations du système initial en initialisant 70 pourcents des opinions des non-têtus à 1. Nous avons réalisé tout cela pour chacune des trois paramétrisations de $S1$ et $S0$ ci-dessus. De plus, pour isoler l'influence des déplacements aléatoires des robots de l'influence des observations aléatoires des robots, nous avons fixé, pour chaque groupe de 5 simulations, un seul enchainement de déplacements. Les robots se déplaceront toujours de la même manière. Nous avons également conservé cet enchainement de déplacements pour effectuer les simulations du graphe dynamique. Cela permet une comparaison uniquement centrée sur l'évolution des opinions sans influence du déplacement. Dans la figure 6.9, nous pouvons remarquer que les graphiques en haut à gauche et en bas confirment l'efficacité du graphe dynamique à calculer la moyenne des probabilités d'avoir l'opinion 1 de chaque robot non-têtu. En effet, les courbes noires représentent l'évolution des moyennes des probabilités d'avoir l'opinion 1 de chaque robot. Les courbes de couleur, quant à elles, représentent le pourcentage de robots ayant effectivement l'opinion 1. Autrement dit, les courbes de couleur représentent une estimation de la probabilité d'un robot donné d'avoir l'opinion 1. En conséquence, les courbes noires sont une estimation de la moyenne des cinq courbes de couleur associées. A long terme, à droite de chaque graphique, les courbes noires passent à peu près au milieu du nuage de l'ensemble des courbes de couleur. Néanmoins, dans le graphique en haut à droite, une des simulations du système initial n'atteint pas le même consensus que les autres ! Or, la courbe noire associée converge vers 1 avec une tolérance de 10^{-4} . Cela signifie que, si le graphe dynamique était réellement une parfaite modélisation du système de 100 robots, cette courbe atteignant 0 aurait moins d'une chance sur 10^{-4} d'apparaître. Ce n'est pas impossible mais c'est extrêmement surprenant de la voir apparaître parmi ces cinq simulations.

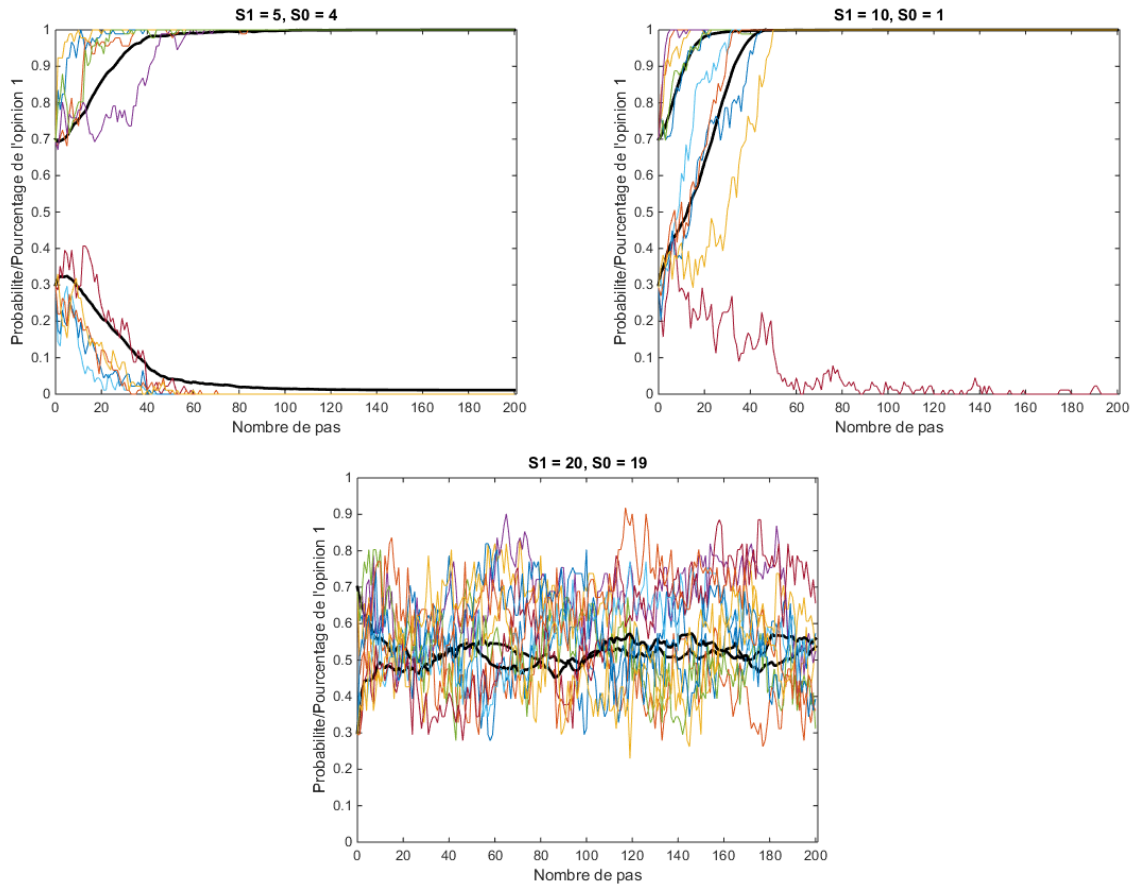


FIGURE 6.9 – Evolution de la moyenne des probabilités des robots non-têtus d’avoir l’opinion 1 au cours du temps (en noir) et évolution du pourcentage de robots non-têtus ayant l’opinion 1 au cours du temps (en couleur), en fonction de la valeur de $S0$ et $S1$, dans le *Probabilistic model*, en postulant une dépendance entre l’opinion et la probabilité de changer d’opinion, selon le graphe dynamique.

Chapitre 7

Conclusion

Lors de ce mémoire, nous avons appliqué différents modèles, différentes approches, différentes abstractions et différents postulats sur notre système de 100 robots. Nous avons également étudié l'impact de différents paramètres de ce système sur l'apparition ou non d'un consensus parmi ces robots. Enfin, nous avons discuté ces résultats en les comparant entre eux et avec nos simulations de départ du comportement de cet ensemble de robots.

Nous avons conclu que l'approche macroscopique modélise efficacement le *Voter model* ainsi que le *Majority model*. De plus, nous sommes arrivés à la conclusion que le graphe All-to-All est une excellente approximation du graphe dynamique à condition que les robots se déplacent suffisamment vite par rapport à la vitesse à laquelle ils changent d'opinion.

Pour chacun des modèles d'échange d'opinion, il semble que le graphe statique donne trop d'importance à la position des robots têtus pour que nous puissions en faire une analyse exhaustive. Néanmoins, nous avons tout de même pu comprendre ceci. Selon le *Voter model*, la condition initiale n'a aucune importance car il n'existe qu'un seul équilibre, et cela est une conclusion valable dans tous les modèles que nous avons réalisés ainsi que pour toutes les paramétrisations. Cet équilibre n'est d'ailleurs jamais un consensus quand il y a au moins un robot têtu de chaque opinion. Selon le *Majority model*, toujours dans le graphe statique, la condition initiale est déterminante car elle peut précipiter les robots vers un consensus ou l'autre en fonction de leur opinion initiale. Cette conclusion s'étend également à tous nos modèles mais n'est pas absolue pour toutes les paramétrisations.

En ce qui concerne le *Probabilistic model*, dans le graphe statique également, nous avons pu mettre en évidence un grand nombre d'équilibres différents pour un même positionnement des robots têtus. Ce modèle semble donc encore plus dépendant à la condition initiale que le *Majority model*, du moins dans le graphe statique. Dans les graphes All-to-all et dynamique, le *Probabilistic model* retrouvait un comportement similaire à celui du *Voter model* quand le nombre de robots têtus devenait relativement grand par rapport au nombre de robots total. En cela, il diffère légèrement du *Majority model* pour lequel 39 robots têtus sur 100 n'est pas encore suffisant pour que le système ne contienne plus qu'un seul équilibre. Durant nos analyses, nous avons réalisé que postuler l'indépendance entre l'opinion et la probabilité de changer d'opinion dans le *Probabilistic model* revient à considérer que ce modèle est équivalent au *Voter model*, ce qui n'est pas le cas en réalité. Cette abstraction est donc trop irréaliste.

Ce mémoire ne contient pas d'étude statistique qui permette de quantifier mathématiquement la confiance que l'on peut accorder à nos différents modèles. Leur crédibilité est donc essentiellement basée sur la justesse des calculs et la pertinence des abstractions. Nous avons pu discuter sous plusieurs angles l'influence du nombre total de robots et du nombre de robots têtus de chaque opinion sur la dynamique d'un système régi par le *Probabilistic model*. Cependant, nous n'avons pas effectué d'analyse de l'impact de la valeur des deux

paramètres déterminant l'évolution de la probabilité de changer d'opinion, k et z . Or, cela aurait pu donner des résultats intéressants.

Suite à nos résultats qui, dans le cas du *Probabilistic model*, sont basés sur des simulations de la master equation correspondante, il pourrait être utile de la résoudre analytiquement. Cela permettrait de réaliser une analyse exhaustive de l'influence des différents paramètres sur les différents équilibres. En ce qui concerne les différents types de graphe étudiés ici, il pourrait être intéressant d'étudier dans quelle mesure un graphe dynamique dans lequel les robots se déplacent extrêmement lentement pourrait produire une dynamique d'opinion similaire à celle d'un graphe statique.

Bibliographie

- [1] M. Coppola, J. Guo, E. Gill et G. C. H. E. de Croon, 2019, The PageRank algorithm as a method to optimize swarm behavior through local analysis, *Swarm Intell*, 13 :1, 277-319.
- [2] G. De Masi, J. Prasetyo, E. Tuci et E. Ferrante, 2020, Zealots Attack and the Revenge of the Commons : Quality vs Quantity in the Best-of-n, *Swarm Intelligence. ANTS 2020. Lecture Notes in Computer Science*, 12421, 256-268.
- [3] W. Feller, 1940, On the Integro-Differential Equations of Purely Discontinuous Markoff Processes. *Transactions of the American Mathematical Society*, 48 :3, 488-515.
- [4] S. Galam, 2005, Local dynamics vs. social mechanisms : A unifying frame, *EUROPHYSICS LETTERS*, 70 :6, 705-711.
- [5] D. T. Gillespie, 1976, A general method for numerically simulating the stochastic time evolution of coupled chemical reactions, *Journal of Computational Physics*, 22 :4, 403-434.
- [6] Y. Gillet, E. Ferrante, Z. Firat et E. Tuci, 2019, Guiding aggregation dynamics in a swarm of agents via informed individuals : an analytical study, *ALIFE 2019 : The 2019 Conference on Artificial Life*. 590-597.
- [7] S. KATO & M.C. Jones, 2013, An extended family of circular distributions related to wrapped Cauchy distributions via Brownian motion, *Bernoulli*, 19 :1, 154-171.
- [8] D. Lanelli, 2020, Master equation and system size expansion, *Séminaire à l'Unamur*.
- [9] D. Lanelli, 2020, Stochastic process, *Séminaire à l'Unamur*.
- [10] J. Lorenz, 2007, Continuous Opinion Dynamics under Bounded Confidence : A Survey, *International Journal of Modern Physics*, 18 :12, 1819-1838.
- [11] G. Maitre, E. Tuci et E. Ferrante, 2020, Opinion dissemination in a swarm of simulated robots with stubborn agents : a comparative study, *IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, Glasgow, United Kingdom, 1-6.
- [12] A. Mauroy, Outils mathématiques de modélisation : Systèmes stochastiques, *Cours à l'Unamur*.
- [13] S. Nolfi, 2021, Behavioral and Cognitive Robotics : An Adaptive Perspective, *Institute of Cognitive Sciences and Technologies, National Research Council, Rome, Italie*.
- [14] A. Reina, G. Valentini, C. Fernández-Oto, M. Dorigo et V. Trianni, 2015, A Design Pattern for Decentralised Decision Making, *PLOS ONE*, 10 :10, 1-18.
- [15] C. Simal, 2020, Processus Epidémiques sur Réseaux Temporels, *Mémoire présenté à l'Unamur*.
- [16] K. Wain, 2009, Dynamique des opinions : Comparaison de quatre modèles, *Mémoire présenté à l'Unamur*.